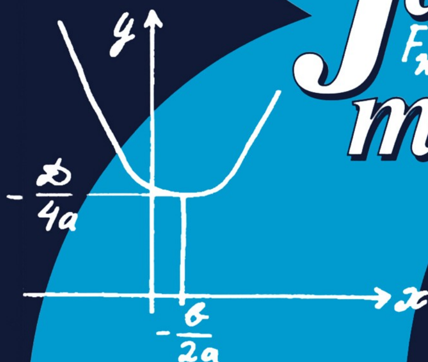


$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$$

$$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$$

Jaunajam matematikui

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$



$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$

8

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA
LJMM

$$f(x)=|x-1|+|x+1|$$

$$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$$

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$$

$$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$$

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

8

2005–2007 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2007

UDK 51(076)
Ja712

ISBN 978-9955-476-51-1

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ 4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS 5
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. STOJAMOJI UŽDUOTIS ... 6
I. **J. Šinkūnas.** VIDURKIAI IR JŲ TAIKYMAI.. 8
PIRMOJI UŽDUOTIS 20
II. **I. Bagdonienė.** DIRICHLĖ PRINCIPAS 22
ANTROJI UŽDUOTIS 25
III. **E. Stankus.** DIOFANTINĖS LYGTYS 26
TREČIOJI UŽDUOTIS 35
IV. **L. Papreckienė.** DAUGIANARIŲ DALUMAS 36
KETVIRTOJI UŽDUOTIS 43
V. **A. Apynis, J. Šinkūnas.** NIUTONO BINOMAS.. 45
PENKTOJI UŽDUOTIS 56
VI. **E. Tumėnaitė.** LOGARITMINĖS IR RODIKLINĖS LYGTYS, NELYGYBĖS IR TAPATYBĖS 58
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS 64
VII. **E. Mazėtis.** STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI 66
SEPTINTOJI UŽDUOTIS 76
VIII. **A. Apynis.** TRIGONOMETRINIAI UŽDAVINIAI 78
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS 85
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS . 86

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI 87
Stojamosios užduoties sprendimas 88
Pirmosios užduoties sprendimas 94
Antrosios užduoties sprendimas 100
Trečiosios užduoties sprendimas 103
Ketvirtosios užduoties sprendimas 106
Penktosios užduoties sprendimas 109
Šeštosios užduoties sprendimas 116
Septintosios užduoties sprendimas 120
Aštuntosios užduoties sprendimas 126
Baigiamosios užduoties atsakymai 131

PRATARMĖ

Šioje aštuntojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2005–2007 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: vidurkiai ir jų taikymai (J. Šinkūnas); Dirichlė principas (J. Bagdonienė); diofantinės lygtys (E. Stankus); daugianarių dalumas (L. Papreckienė); Niutono binomas (A. Apynis, J. Šinkūnas); logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės (E. Tumėnaitė); stereometrijos uždaviniai (E. Mazėtis); trigonometrijos uždaviniai (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2005 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2007 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių septynerių LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams ir redaktorei Joanai Pribušauskaitei.

Taip pat tariame nuoširdų ačiū kolegei Kristinai Lyndienei už tekstų rinkimą ir maketavimą.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

**Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)**

1. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

2. Apskaičiuokite (remdamiesi trigonometrinėmis formulėmis):

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}.$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x(y+z)=5,\\ y(z+x)=10,\\ z(x+y)=13. \end{cases}$$

4. Įrodykite, kad skaičius

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+2004^3$$

dalijasi iš 2005.

5. Autobuse važiavo ne daugiau kaip 100 keleivių. Be to, sėdinčių keleivių buvo du kartus daugiau negu stovinčių. Stotelėje išlipo 4% visų keleivių. Kiek keleivių liko autobuse?

6. Du broliai į turgų atvežė parduoti žąsiukus. Jie kiekvieną žąsiuką pardavė po tiek litų, kiek buvo atvežę žąsiukų. Broliai gautus pinigus nutarė pasidalyti po lygiai. Iš pradžių jiems teko po 10 Lt, tačiau liko vienas 10 Lt banknotas ir dar keli litai. Vyresnysis brolis likusį 10 Lt banknotą atidavė jaunesniajam, o pats pasiėmė kitus likusius litus. Kiek litų jaunesnysis brolis liko skolingas vyresniajam?

7. V–VIII klasių matematikos olimpiadoje dalyvavo dvyniai. Kai mokytojas paklausė, ar jie dar turi brolių ir koks jų amžius, dvyniai

atsakė: „Mes turime vieną brolį, o jo amžius užrašomas dviem vienodais skaitmenimis; be to, mūsų visų trijų amžių suma yra dviženklis skaičius, kurio antrasis skaitmuo dvigubai didesnis už pirmąjį skaitmenį“. Kiek broliams metų?

8. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė, kraštinės AB vidurio statmuo ir aukštinė, išvesta iš viršūnės B, kertasi viename taške. Raskite kampo A didumą.

9. Iškilojo keturkampio $ABCD$, kurio plotas lygus S, kraštinės pratęstos ir jų tęsiniuose atidėtos atkarpos, lygios atitinkamoms kraštinėms: kraštinės AB tęsinyje – atkarpa $BM = AB$; kraštinės BC tęsinyje – atkarpa $CN = BC$; kraštinės CD tęsinyje – atkarpa $DP = CD$; kraštinės DA tęsinyje – atkarpa $AQ = AD$. Apskaičiuokite keturkampio $MNPQ$ plotą.

10. Trikampės piramidės pagrindas – statusis trikampis, o jos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Be to, įbrėžto į piramidės pagrindą apskritimo lietimosi su įžambine taškas įžambinę dalija į dvi 3 cm ir 8 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite piramidės tūrį.



I. VIDURKIAI IR JŲ TAIKYMAI

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Kelių skaičių aritmetinio vidurkio ir dviejų neneigiamų skaičių geometrinio vidurkio sąvokos žinomos iš pagrindinės mokyklos. Šiame straipsnelyje apibrėšime ir kelių skaičių geometrinį, harmoninį bei kvadratinį vidurkius. Tirsime jų sąryšius, daugiausiai dėmesio skirdami aritmetiniam ir geometriniam vidurkiams bei jų taikymams sprendžiant uždavinius.

Apibrėžimai. 1. Realiųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *aritmetiniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

2. Realiųjų neneigiamų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *geometriniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\ .$$

3. Realiųjų teigiamų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *harmoniniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

4. Realiųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *kvadratiniu vidurkiu* vadinamas skaičius

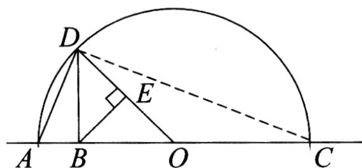
$$K_n = \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Yra įrodyta, kad

$$H_n \le G_n \le A_n \le K_n.$$

Nelygybes $H_2 \le G_2 \le A_2$ galima pavaizduoti geometriškai.

1) Nubrėžkime tiesę ir joje vieną po kitos atidėkime dvi atkarpas $AB = a$ ir $BC = b$ (1 pav.).



1 pav.

2) Nubrėžkime pusapskritimį, kurio skersmuo AC, o centras O.

3) Iš taško B iškelkime skersmeniui AC statmenį, kuris apskritimą kerta taške D.

Trikampis ADC yra statusis, nes kampas ADC yra įbrėžtinis ir remiasi į skersmenį.

a) Įrodysime, kad $G_2 \le A_2$, t. y. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Kadangi $\Delta ADB \sim \Delta DBC$ (pagal du kampus), tai $\frac{DB}{AB} = \frac{BC}{DB}$, t. y. $BD^2 = AB \cdot BC$. Iš čia

$$DB = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a \cdot b} = G_2.$$

Kita vertus, $AO = OD = \frac{a+b}{2} = A_2$ ir $DB \le OD$, tai $G_2 \le A_2$.

Lygybė $G_2 = A_2$ galima tik tada, kai $OD = DB$, t. y. kai taškas B sutampa su tašku O. Taškas B sutampa su tašku O tik tada, kai $a = b$.

b) Įrodysime, kad $H_2 \le G_2$. t. y. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$.

Iš taško B nubrėžkime spinduliui OD statmenį BE. Kadangi $\Delta OBD \sim \Delta BED$ (pagal du kampus), tai $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{OD}$, t. y.

$$DE = \frac{DB^2}{OD} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H_2.$$

Kadangi $DE < BD$ (trikampio BED statinis trumpesnis už įžambinę), tai $H_2 \le G_2$ ir $H_2 = G_2$ tik tada, kai $a = b$.

Taigi įsitikinome, kad $H_2 \le G_2 \le A_2$.

Sąryšis $H_2 < G_2 < A_2 < K_2$ geometriškai pavaizduotas [1] knygelėje.

Teorema. Neneigiamų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už tų skaičių geometrinį vidurkį, t. y.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Įrodymas. Teoremą įrodysime tik atskirais atvejais, kai $n = 2, 4, 3$. Šių atvejų dažnai pakanka sprendžiant praktinius uždavinius. Bendruoju atveju teorema įrodoma remiantis indukcijos principu.

1 atvejis. Kai $n = 2$, reikia įrodyti nelygybę $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Įrodymas. Akivaizdu, kad $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$, t. y. $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} \geq 0$ arba $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2$.

2 atvejis. Kai $n = 4$, įrodysime, kad

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}.$$

Įrodymas. Iš tikrųjų

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

(čia du kartus pritaikėme nelygybę tarp dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių). Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3 atvejis. Kai $n = 3$, įrodysime, kad

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}.$$

Įrodymas. Kadangi

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} + a_1 + a_2 + a_3}{4},$$

tai

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[4]{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot a_1 a_2 a_3}$$

(pritaikėme nelygybę tarp keturių neneigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių).

Šią nelygybę pakėlę ketvirtuoju laipsniu, gauname:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^4 \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot a_1 a_2 a_3 .$$

Jeigu $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, t. y. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, pastaroji nelygybė virsta tapatybe. Kai $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, šią nelygybę padaliję iš $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, gausime:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^3 \geq a_1 a_2 a_3 ,$$

t. y.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} .$$

Dažniausiai taikomos labai svarbios šios teoremos išvados.

1 išvada. Jeigu n teigiamų dėmenų ($n = 2, 3, 4, \ldots$) suma yra pastovi, tai jų sandauga yra didžiausia, kai dėmenys lygūs.

Įrodymas. Sakykime, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P$. Tada

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{P}{n}\right)^n .$$

Taigi sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ ne didesnė už $\left(\frac{P}{n}\right)^n$. Ši sandauga lygi $\left(\frac{P}{n}\right)^n$ (įgyja didžiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2 išvada. Jeigu n teigiamų dauginamųjų sandauga yra pastovi, tai jų suma yra mažiausia, kai dauginamieji lygūs.

Įrodymas. Sakykime, kad $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = S$. Tada

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{S} ,$$

t. y.

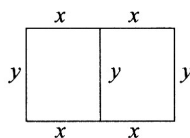
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \sqrt[n]{S} .$$

Taigi ši suma ne mažesnė už $n \sqrt[n]{S}$. Ji lygi $n \sqrt[n]{S}$ (įgyja mažiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Pavyzdžiai.

1. Rasime kokie turi būti stačiakampio formos žemės sklypo, kurio plotas 2400 m^2, matmenys, kad jam aptverti ir dar pertverti į du lygiapločius stačiakampius reikėtų mažiausiai vielinio tinklo.

Sprendimas. Sklypas pavaizduotas 2 paveiksle. Tvoros ilgis $S=4x+3y$, o sklypo plotas – $2xy=2400$, t. y. $xy=1200$. Iš čia $y=\dfrac{1200}{x}$. Šią y išraišką įrašę į tvoros ilgio formulę, gauname



2 pav.

$$S=4x+\frac{3\cdot 1200}{x}=4x+\frac{3600}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{3600}{x}}=240\,(\text{m}).$$

Taigi tvoros ilgis ne mažesnis už 240 m. Tvoros ilgis lygus 240 m (mažiausia reikšmė), kai $4x=\dfrac{3600}{x}$, t. y. kai $x=30$ m. Tada $y=\dfrac{1200}{30}=40$ m.

Ats.: Sklypo matmenys 60 m × 40 m.

2. Išspręskime lygtį

$$(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1.$$

Sprendimas. Šią lygtį spręsime įvedę naują kintamąjį y: reiškinių $(x-4{,}5)$ ir $(x-5{,}5)$ aritmetinį vidurkį, t. y.

$$y=\frac{x-4{,}5+x-5{,}5}{2}=x-5.$$

Tada $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=(y+0{,}5)^4+(y-0{,}5)^4$. Taigi gauname lygtį

$$(y+0{,}5)^4+(y-0{,}5)^4=1$$

arba

$$(y+0{,}5)^2\cdot(y+0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2\cdot(y-0{,}5)^2=1.$$

Kairėje lygties pusėje atlikę veiksmus (pakėlę kvadratu, sudauginę ir sutraukę panašius narius), gauname bikvadratinę lygtį

$$2y^4+3y^2-0{,}875=0.$$

Pažymėję $y^2 = t$, gauname lygtį $2t^2 + 3t - 0{,}875 = 0$. Jos sprendiniai: $t_1 = 0{,}25$, $t_2 = -0{,}25$. Taigi $y^2 = 0{,}25$. Iš čia $y_1 = -0{,}5$, $y_2 = 0{,}5$ (lygtis $y^2 = -0{,}25$ – sprendinių neturi). Vadinasi, $x_1 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$, $x_2 = 5 + 0{,}5 = 5{,}5$.

Ats.: 4,5, 5,5.

3. Viename inde yra 16 kg druskos tirpalo, o kitame – 25 kg druskos tirpalo (nebūtinai tos pačios koncentracijos). Kai į abu indus buvo įpilta vandens, pirmajame inde druskos koncentracija sumažėjo m kartų, o antrajame inde – n kartų. Žinoma, kad $mn = m + n + 3$. Rasime, esant kurioms m ir n reikšmėms į abu indus buvo įpilta mažiausiai vandens. Koks vandens kiekis buvo įpiltas?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmame inde yra u kg druskos, o antrame inde – v kg druskos, ir į pirmą indą buvo įpilta x kg vandens, o į antrą indą – y kg vandens.

Druskos koncentracija pirmajame inde iš pradžių buvo $\frac{u}{16}$, o įpylus vandens – $\frac{u}{16 + x}$. Antrajame inde druskos koncentracija iš pradžių buvo $\frac{v}{25}$, o įpylus vandens – $\frac{v}{25 + y}$. Pagal sąlygą:

$$\frac{\frac{u}{16}}{\frac{u}{16 + x}} = m \text{ ir } \frac{\frac{v}{25}}{\frac{v}{25 + y}} = n$$

arba

$$\frac{16 + x}{16} = m \text{ ir } \frac{25 + y}{25} = n.$$

Iš pirmosios lygties randame $x = 16m - 16$, o iš antrosios lygties – $y = 25n - 25$. Taigi į abu indus buvo įpilta $x + y = 16m + 25n - 41$ kg vandens. Kadangi

$$m = \frac{n + 3}{n - 1} = 1 + \frac{4}{n - 1},$$

tai

$$x+y=16\left(1+\frac{4}{n-1}\right)+25n-41=16+\frac{64}{n-1}+25(n-1)+25-41=$$

$$=\frac{64}{n-1}+25(n-1)\geq 2\sqrt{\frac{64}{n-1}\cdot 25(n-1)}=80.$$

Taigi $x+y\geq 80$ (kg). Mažiausias vandens kiekis $x+y=80$ įpilamas į abu indus, kai $\frac{64}{n-1}=25(n-1)$, t. y. kai $n=\frac{13}{5}$ ir

$$m=1+\frac{4}{\frac{13}{5}-1}=\frac{7}{2}.$$

Ats.: Į indą buvo įpilta 80 kg vandens, kai $m=\frac{7}{2}$ ir $n=\frac{13}{5}$.

4. Gaminant x vienetų produkcijos, gamybos kaštai skaičiuojami pagal formulę

$$K(x)=2{,}5x^3+50x^2+60\,000.$$

Rasime, kiek produkcijos vienetų reikia pagaminti, kad vidutinė produkcijos vieneto kaina būtų mažiausia.

Sprendimas. Vidutinė produkcijos vieneto kaina lygi $\frac{K(x)}{x}=2{,}5x^2+50x+\frac{60\,000}{x}$. Ieškosime tokios x reikšmės (natūraliojo skaičiaus), kuriai esant funkcija $\frac{K(x)}{x}$ įgyja mažiausią reikšmę. Kadangi sandauga $2{,}5x^2\cdot 50x\cdot\frac{60\,000}{x}$ nėra pastovus dydis, tai negalime remtis 2 išvada. Funkcijos $\frac{K(x)}{x}$ išraišką pertvarkome taip: $\frac{K(x)}{x}=2{,}5x^2+50x+\frac{20\,000}{x}+\frac{20\,000}{x}+\frac{20\,000}{x}$. Turėsime:

$$\frac{K(x)}{x}\geq 5\sqrt[5]{2{,}5x^2\cdot 50x\cdot\frac{20\,000}{x}\cdot\frac{20\,000}{x}\cdot\frac{20\,000}{x}}=5000,$$

t. y. $\frac{K(x)}{x} \geq 5000$. Mažiausia $\frac{K(x)}{x}$ reikšmė, lygi 5000, įgyjama, kai $25x^2 = 50x = \frac{20\,000}{x}$, t. y. kai $x = 20$.

Ats.: 20.

5. a) Rasime funkcijos $f(x) = \frac{8x}{x^4+3}$ didžiausią reikšmę;

b) Rasime funkcijos $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ didžiausią ir mažiausią reikšmes.

Sprendimas. a) Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Kai $x < 0$, funkcijos reikšmės yra neigiamos. Todėl didžiausia funkcijos reikšmė gali būti įgyta tik kai x reikšmė teigiama. Taigi nagrinėsime funkciją $f(x) = \frac{8x}{x^4+3}$ intervale $(0; +\infty)$. Šiame intervale $f(x) = \frac{8x}{x^4+3} = \frac{8}{x^3 + \frac{3}{x}}$. Kadangi

$$x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 4,$$

tai $f(x) \leq \frac{8}{4} = 2$. Funkcija didžiausią reikšmę, lygią 2, įgyja, kai $x^3 = \frac{1}{x}$, t. y. kai $x = 1$.

Ats.: $f_{\text{didž.}} = f(1) = 2$.

b) Kadangi funkcijos

$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x = 2\sin^2 x \cos x$$

išraiškos abu dauginamieji $\sin^2 x$ ir $\cos x$ intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ yra teigiami, o jų suma $\sin^2 x + \cos x$ nėra pastovus dydis, tai negalime taikyti pirmosios išvados. Ieškome funkcijos

$$f^2(x) = 4\sin^4 x \cdot \cos^2 x,$$

o kartu ir $f(x)$, didžiausios reikšmės. Turime:

$$f^2(x) = 2\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (2\cos^2 x) \le$$

$$\le 2\left(\frac{\sin^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{27}.$$

Vadinasi, $f(x) \le \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Funkcija įgyja didžiausią reikšmę, lygią $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, kai $\sin^2 x = 2\cos^2 x$, t. y. kai $\text{tg}^2 x = 2$. Iš čia $\text{tg}\, x = \sqrt{2}$ ir $\text{tg}\, x = -\sqrt{2}$. Kadangi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai lygtis $\text{tg}\, x = \sqrt{2}$ turi vienintelį sprendinį $x = \text{arctg}\sqrt{2} \approx 55^\circ$. Šiame intervale lygtis $\text{tg}\, x = -\sqrt{2}$ sprendinių neturi. Kadangi $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(x) > 0$, kai $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai mažiausią reikšmę funkcija įgyja intervalo galuose.

Ats.: Didžiausia funkcijos reikšmė lygi $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, kai $x \approx 55^\circ$, o mažiausia reikšmė lygi 0, kai $x = 0$ ir $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Įrodysime nelygybę

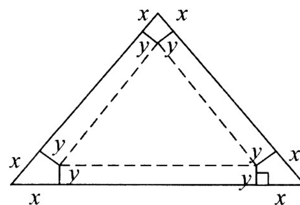
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}};\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Įrodymas. Turime:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

7. Iš taisyklingojo trikampio formos skardos lapo, kurio kraštinė lygi 60 cm, reikia pagaminti trikampės piramidės formos atvirą dėžutę trikampio kampuose iškerpant vienodus keturkampius ir sulenkiant trikampio kraštines (žr. 3 pav.). Rasime, esant kuriai x reikšmei dėžutės tūris yra didžiausias.



3 pav.

Sprendimas. Sakykime, dėžutės aukštis yra y. Dėžutės pagrindas – taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė lygi $60-2x$. Pagrindo plotas

$$S=\frac{(60-2x)^2\cdot\sqrt{3}}{4},$$

o dėžutės tūris –

$$V=Sy=\frac{(60-2x)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot y.$$

Kadangi $y = x\ \mathrm{tg}30^\circ=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, tai

$$V=\frac{(60-2x)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}=\frac{(60-2x)^2\cdot x}{4}=$$

$$=\frac{(60-2x)(60-2x)\cdot(4x)}{4\cdot4}\le\frac{1}{16}\left(\frac{60-2x+60-2x+4x}{3}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{120}{3}\right)^3=\frac{1}{16}\cdot40^3=4000\ (\mathrm{cm}^3).$$

Taigi dėžutės tūris ne didesnis už 4000 cm^3. Dėžutės tūris yra didžiausias ir lygus 4000 cm^3, kai $60-2x=4x$, t. y. kai $x=10$ cm.

Ats.: 10 cm.

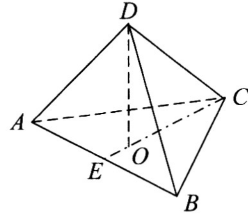
8. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi b. Rasime, kokia turi būti piramidės aukštinė, kad piramidės tūris būtų didžiausias.

Sprendimas. 4 paveiksle pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė, kurios briauna $DC=b$, o pagrindas – taisyklingasis trikampis ABC. Sakykime, piramidės aukštinė $DO=x$. Tada iš stačiojo trikampio DOC:

$$OC=\sqrt{DC^2-DO^2}==\sqrt{b^2-x^2},$$

o

$$CE=\frac{3}{2}OC=\frac{3}{2}\sqrt{b^2-x^2}.$$



4 pav.

Iš stačiojo trikampio CEB:

$$BC^2-BE^2=BC^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=CE^2,$$

t. y. $\frac{3}{4}BC^2=CE^2$. Iš čia

$$BC^2=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}(b^2-x^2)=3(b^2-x^2).$$

Kadangi $S_{ABC}=\frac{BC^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}(b^2-x^2)}{4}$, tai piramidės tūris

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DO=\frac{\sqrt{3}(b^2-x^2)}{4}\cdot x.$$

Ieškosime, esant kuriai x reikšmei $V^2(x)=\frac{3}{16}(b^2-x^2)^2\cdot x^2=$ $=\frac{3}{16}(b^2-x^2)(b^2-x^2)\cdot(2x^2)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{32}(b^2-x^2)(b^2-x^2)(2x^2)$ įgyja didžiausią reikšmę. Esant šiai x reikšmei ir $V(x)$ įgys didžiausią reikšmę. Turime:

$$V^2(x)\le\frac{3}{32}\left(\frac{b^2-x^2+b^2-x^2+2x^2}{3}\right)^3=\frac{3}{32}\cdot\frac{8b^6}{27}=\frac{b^6}{36}.$$

Taigi $V(x)\le\frac{b^3}{6}$. Piramidės tūris yra didžiausias ir lygus $\frac{b^3}{6}$, kai $b^2-x^2=2x^2$, t. y. kai $x=\frac{b\sqrt{3}}{3}$.

Ats.: $\frac{b\sqrt{3}}{3}$.

9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos akvariumą, kurio tūris V. Rasime, kokie turi būti akvariumo matmenys, kad jo gamybai reikėtų mažiausiai medžiagos.

Sprendimas. Sakykime, akvariumo ilgis x, plotis y, o aukštis – z. Tada tūris $V = xyz$, paviršiaus plotas

$$T = xy + 2xz + 2yz \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Taigi akvariumo paviršiaus plotas ne mažesnis už $3\sqrt[3]{4V^2}$. Akvariumo paviršiaus plotas yra mažiausias ir lygus $3\sqrt[3]{4V^2}$, kai $xy = 2xz = 2yz$. Iš čia išplaukia, kad $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$.

Ats.: Akvariumo pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi $\sqrt[3]{2V}$, o aukštinė du kartus trumpesnė už pagrindo kraštinę.

10. a) Motociklininkas pusę kelio važiuoja greičiu v_1 km/h, o kitą pusę kelio – v_2 km/h greičiu. Rasime vidutinį motociklininko greitį.

b) Motociklininkas trečdalį kelio važiuoja greičiu v_1 km/h, antrą trečdalį kelio – v_2 km/h greičiu ir paskutinį trečdalį kelio – v_3 km/h greičiu. Rasime vidutinį motociklininko greitį.

Sprendimas. a) Sakykime, motociklininkas iš viso nuvažiavo s km. Tada pirmąją pusę kelio jis nuvažiavo per $t_1 = \dfrac{s}{2v_1}$ h, o antrąją pusę kelio – per $t_2 = \dfrac{s}{2v_2}$ h. Motociklininko vidutinis greitis yra

$$v_{\text{vid.}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}}.$$

Taigi motociklininko vidutinis greitis lygus greičių v_1 ir v_2 harmoniniam vidurkiui.

Pavyzdžiui, kai $v_1 = 40$ km/h, o $v_2 = 60$ km/h, $v_{\text{vid.}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{60}} = 48$ km/h.

b) Kaip ir a atveju, nesunku įsitikinti, kad $v_{\text{vid.}} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3}}$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Į 0,9 ha stačiakampio formos žemės sklypą iš dviejų priešingų pusių reikia aptverti 1 m aukščio mūrine tvora, o iš kitų dviejų pusių – medine tvora. 1 m^2 mūrinės tvoros kainuoja 25 Lt, o 1 m^2 medinės tvoros – 10 Lt. Kokie turi būti žemės sklypo matmenys, kad tvora kainuotų pigiausiai?

2. Išspręskite lygtį $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

3. Vienoje cisternoje yra 900 kg druskos rūgšties tirpalo, o kitoje cisternoje – 1600 kg druskos rūgšties tirpalo (nebūtinai tos pačios koncentracijos). Kai į abi cisternas buvo įpilta vandens, pirmoje cisternoje druskos rūgšties koncentracija sumažėjo r kartų, o antroje cisternoje s kartų. Žinoma, kad $2rs = 18 - r$. Raskite, esant kurioms r ir s reikšmėms į abi cisternas buvo įpilta mažiausiai vandens. Koks vandens kiekis buvo įpiltas?

4. Gaminant x vienetų produkcijos, gamybos kaštai apskaičiuojami pagal formulę

$$K(x) = 2x^2 + 200x + 1\,280\,000.$$

Raskite, kiek produkcijos vienetų reikia pagaminti, kad produkcijos vieneto vidutiniai kaštai būtų minimalūs.

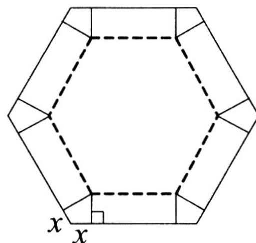
5. Raskite funkcijos $f(x) = x^{1500} + x^{400} + x^{105} + \dfrac{2005}{x}$, $0 < x < \infty$, mažiausią reikšmę.

6. Įrodykite nelygybes:

a) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai $a \geq 0$, $b \geq 0$;

b) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$, kai $a > 0, b > 0, c > 0$.

7. Taisyklingojo šešiakampio formos skardos lapo, kurio kraštinė lygi 90 cm, kampuose išpjauti lygūs keturkampiai. Sulenkus šešiakampio kraštines, gauta taisyklingosios šešiakampės prizmės formos dėžutė be dangčio (žr. 5 pav.). Raskite, kuriai x reikšmei esant dėžutės tūris yra didžiausias.



5 pav.

8. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi b. Raskite, kokia turi būti piramidės aukštinė, kad piramidės tūris būtų didžiausias.

9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos dėžę su dangčiu. Raskite, kokie turi būti dėžės, kurios tūris yra V, matmenys, kad jos gamybai reikėtų mažiausiai medžiagos.

10. Kūgio sudaromoji lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite kūgio tūrį. Esant kuriai α reikšmei tūris yra didžiausias?

Literatūra:

1. V. Vitkus. *Vidurkiai.* Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 25–31, 94–98.
2. J. Šinkūnas. *Ekstremumai be išvestinių.* Alfa plius omega, 2003, Nr. 3, 58–62.



II. DIRICHLĖ PRINCIPAS

Irena Bagdonienė
(Vilniaus licėjus)

Dirichlė (Dirichlet[1]) principas, dažnai vadinamas *narvelių* ir *triušių* principu, formuluojamas taip:

jeigu į n narvelių reikia patalpinti daugiau negu n triušių, tai bent viename narvelyje teks patalpinti ne mažiau kaip du triušius.

Pavyzdžiui, negalima į tris narvelius patalpinti dešimties triušių taip, kad kiekviename narvelyje būtų ne daugiau kaip trys triušiai.

Bendresnė šio principo formuluotė tokia:

jeigu į n dėžių (narvelių) reikia patalpinti daugiau negu $n \cdot k$ *rutulių (triušių), tai bus bent viena dėžė (narvelis), į kurią pateks daugiau negu k rutulių (triušių).*

Išspręskime keletą uždavinių remdamiesi Dirichlė principu.

1. Klasėje yra 25 mokiniai. Ar yra toks metų mėnuo, per kurį savo gimtadienius švęstų ne mažiau kaip 3 mokiniai?

Sprendimas. Čia *narveliai* – mėnesiai, o *triušiai* – mokiniai. Kadangi yra $25 = 12 \cdot 2 + 1$ mokiniai, o *narvelių* yra 12, tai, pagal Dirichlė principą, yra toks metų mėnuo, kai savo gimtadienį švenčia ne mažiau kaip 3 mokiniai.

2. Klasėje 21 mokinys. Kristina gimtadienio proga į savo klasę atnešė 200 saldainių. Įrodykite, kad nors ir po kiek saldainių mokiniai suvalgytų (net jeigu kas nors ir visai nevalgytų), visada atsiras bent du mokiniai, suvalgę po vienodą saldainių skaičių.

Įrodymas. Tarkime, kad kiekvienas mokinys suvalgė po skirtingą saldainių skaičių. Sunumeruokime mokinus suvalgytų saldainių skaičiaus didėjimo tvarka. Tada pirmasis mokinys suvalgė ≥ 0 saldainių, antrasis – ≥ 1 saldainį, trečiasis – ≥ 2 saldainius, ... , 21–sis – ≥ 20 saldainių. Tada visi jie suvalgė ne mažiau kaip $\geq 0 + 1 + 2 + ... + 20 = 210$ saldainių. Gavome prieštaravimą, nes saldainių buvo tik 200. Taigi mūsų prielaida, kad kiekvienas mokinys suvalgė skirtingą saldainių skaičių, yra neteisinga. Vadinasi, bent du mokiniai suvalgė po vienodą saldainių skaičių.

---

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – vokiečių matematikas

Dalumo uždaviniai

1. Įrodykite, kad tarp bet kurių šešių sveikųjų skaičių yra bent du skaičiai, kurių skirtumas dalijasi iš 5.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 5, galima gauti 5 skirtingas liekanas: 0, 1, 2, 3, 4. Tarkime, kad *narveliai* – liekanos, o *triušiai* – šeši sveikieji skaičiai. Kadangi *narvelių* yra 5, o skaičių – 6, tai yra *narvelis*, kuriame yra bent du skaičiai. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 5.

2. Įrodykite, kad tarp bet kurių 100 natūraliųjų skaičių visada galima rasti 15 tokių skaičių, jog bet kurių dviejų iš jų skirtumas dalysis iš 7.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 7, galime gauti daugiausiai 7 skirtingas liekanas. Kadangi $100 = 7 \cdot 14 + 2$, tai, pagal Dirichlė principą, tarp duotųjų 100 skaičių yra mažiausiai 15 skaičių, kuriuos dalijant iš 7 gaunama ta pati liekana. Tuomet bet kurių dviejų skaičių, paimtų iš minėtų 15 skaičių, skirtumas dalijasi iš 7.

3. Įrodykite, kad tarp bet kurių 12 skirtingų dviženklių natūraliųjų skaičių galima rasti bent du skaičius, kurių skirtumas būtų dviženklis skaičius su vienodais skaitmenimis.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 11, galima gauti ne daugiau kaip 11 skirtingų liekanų. Kadangi skaičių turime 12, tai yra mažiausiai 2 skaičiai, kuriuos dalydami iš 11 gauname vienodas liekanas. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 11 ir yra mažesnis už 99. Taigi šis skirtumas yra skaičiaus 11 kartotinis, o visų vienuolikos kartotinių, ne didesnių už 99, skaitmenys yra vienodi.

4. Iš sekos 1, 2, 3, ... , 200 išrinktas 101 skaičius. Įrodykite, kad tarp jų yra du skaičiai, iš kurių vienas yra kito daliklis.

Įrodymas. Tarp nagrinėjamos sekos skaičių yra 100 nelyginių skaičių, mažesnių už 200. Kiekvieno skaičiaus *a narveliu* vadinsime skaičių *a*, 2*a*, 4*a*, 8*a*, 16*a*, ... ; aibę (*a* – nelyginis skaičius, mažesnis už 200). Čia *narveliai* – nelyginių skaičių, padaugintų iš dvejeto laipsnių, rinkiniai, o *triušiai* – išrinktieji skaičiai. Kiekvienas iš jų patenka į vieną *narvelį*. Kadangi išrinktas 101 skaičius, o *narvelių* yra 100, tai, pagal Dirichlė principą, bus *narvelis*, kuriame yra bent du skaičiai. Aišku, kad iš *narvelio* dviejų skaičių vienas dalijasi iš kito.

5. Įrodykite, kad yra skaičiaus 1579 (Vilniaus universiteto įkūrimo metai) kartotinis, kurio visi skaitmenys yra vienetai.

Įrodymas. Nagrinėkime skaičių seką 1, 11, 111, ... , $\underbrace{111...1}_{1580}$.

Dalydami šiuos skaičius iš 1579, pagal Dirichlė principą, rasime mažiausiai du skaičius su vienodomis liekanomis. Tarkime, kad tie skaičiai yra $\underbrace{111...1}_{m}$ ir $\underbrace{111...1}_{m+n}$. Iš didesniojo skaičiaus atėmę mažesnįjį,

gausime skaičių $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{000...0}_{m}=\underbrace{111...1}_{n}\cdot 10^m$, kuris dalijasi iš 1579.

Kadangi skaičiai 10^m ir 1579 bendrų daliklių neturi, tai skaičius $\underbrace{111...1}_{n}$

dalijasi iš 1579.

Geometriniai uždaviniai

1. Keletas apskritimo lankų nuspalvinti raudonai. Nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už apskritimo ilgio pusę. Įrodykite, kad yra toks apskritimo skersmuo, kurio galai nuspalvinti raudonai.

Įrodymas. Nuspalvinkime mėlynai lankus, simetriškus raudoniesiems lankams apskritimo centro atžvilgiu. Kadangi raudonųjų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio, tai ir mėlynai nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio. Vadinasi, bus apskritimo lankelių, nuspalvintų abiem spalvomis. Skersmens, kurio vienas galas nuspalvintas dviem spalvomis, kitas galas yra nuspalvintas raudonai.

2. Įrodysime, kad ir kaip kvadrate, kurio kraštinė 1 m, pažymėtume 51 tašką, bent tris iš jų galima uždengti kvadratėliu, kurio kraštinė 0,2 m.

Įrodymas. Suskaidykime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius, kurių kraštinė lygi 0,2 m. Įrodysime, kad bent viename jų bus bent 3 iš pažymėtųjų taškų. Jei kiekviename kvadratėlyje (viduje arba kraštinėse) būtų ne daugiau kaip 2 taškai, tai iš viso turėtume ne daugiau 50 taškų $(2\cdot 25=50)$. Vadinasi, yra bent vienas kvadratėlis, kuriame yra ne mažiau kaip 3 taškai.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Klasėje yra 30 mokinių. Mikas Petraitis diktante padarė 13 klaidų, o kiti – mažiau. Įrodykite, kad bent 3 mokiniai padarė po vienodą klaidų skaičių (galbūt ir visai nepadarė klaidų).

2. Koks turėtų būti mažiausias mokinių skaičius mokykloje, kad bent du mokiniai švęstų savo gimtadienį tą patį mėnesį ir tą pačią dieną?

3. Vienoje mokykloje yra 1076 mokiniai, kurie mokosi 43 klasėse. Įrodykite, kad yra klasė, kurioje mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.

4. Įrodykite, kad yra skaičiaus 2005 kartotinis, kurio visi skaitmenys tik vienetai ir nuliai.

5. Įrodykite, kad tarp bet kurių 65 natūraliųjų skaičių galima rasti 9 skaičius, kurių suma dalijasi iš 9.

6. Įrodykite, kad tarp bet kurių n natūraliųjų skaičių galima rasti keletą skaičių, kad jų suma dalytųsi iš n, arba vieną skaičių, kuris dalytųsi iš n.

7. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 30 komandų, kurios tarpusavyje turi susitikti tik po vieną kartą. Įrodykite, kad bet kuriuo varžybų momentu yra bent dvi komandos, susitikusios po vienodą skaičių kartų.

8. Kvadrate, kurio kraštinės ilgis 1m, pažymėtas 51 taškas. Įrodykite, kad kurie nors trys iš pažymėtųjų taškų yra skritulio, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$, viduje.

9. Nubrėžtos 7 atkarpos. Kiekviena iš jų ilgesnė už 10 cm, bet trumpesnė už 1 m. Įrodykite, kad iš šių atkarpų galima sudaryti bent vieną trikampį.

10. Kiekviena iš devynių tiesių dalija kvadratą į du keturkampius, kurių plotų santykis $1:3$. Įrodykite, kad bent trys iš šių tiesių eina per vieną tašką.

III. DIOFANTINĖS LYGTYS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Ne kartą esame sprendę lygtis

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

kai a, b, c – realieji skaičiai, o x ir y – nežinomieji. Tokios lygties *sprendiniu* vadinama realiųjų skaičių pora (x, y), tenkinanti (1) lygtį. Kai bent vienas iš koeficientų a arba b yra nelygus nuliui, ši lygtis turi be galo daug sprendinių. Jeigu, pavyzdžiui, $b \neq 0$, tai visų (1) lygties sprendinių aibę galime užrašyti taip: $\{(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}), x \in \mathrm{R}\}$.

Lygtys, turinčios be galo daug sprendinių, vadinamos *neapibrėžtosiomis lygtimis*. Vadinasi, (1) lygtis yra neapibrėžtoji.

Vienas iš įdomesnių skaičių teorijos uždavinių yra neapibrėžtųjų algebrinių lygčių su sveikaisiais koeficientais sveikųjų sprendinių radimo uždavinys. Tokios lygtys dar vadinamos *diofantinėmis lygtimis*. Pavyzdžiui, kai (1) lygtyje $a, b, c \in \mathrm{Z}$, ir ieškoma šios lygties *sveikųjų sprendinių*, tai sakoma, jog sprendžiama *pirmojo laipsnio* (1) *diofantinė lygtis*. Tuomet sveikųjų skaičių pora (x, y), $x, y \in \mathrm{Z}$, tenkinanti lygtį, vadinama tiesiog lygties *sveikuoju sprendiniu*.

Kartais tenka spręsti ir sudėtingesnes diofantines lygtis, pavyzdžiui, $x^2 - y^2 + xy = 0$ ar pan. Tokių lygčių sprendiniai taip pat yra sveikųjų skaičių poros (x, y), tenkinančios lygtį.

Diofantines lygtis sprendė daug žymių matematikų – senovės graikų matematikas Pitagoras (VI a. pr. Kr.), Aleksandrijos matematikas Diofantas (II–III a. pr. Kr.), kurio vardu ir vadinamos tokios lygtys, šių laikų matematikai Ferma (Fermat[1]), Lagranžas (Lagrange[2]), Oileris (Euler[3]) ir daugelis kitų. Tačiau nepaisant visų kartų matematikų pastangų iki šiol diofantinių lygčių teorijoje yra likę daug neišspręstų uždavinių. Pavyzdžiui, ir dabar problemiška surasti trečiojo bei aukštesnių laipsnių diofantinių lygčių visus sprendinius. Netgi nežinoma, ar

[1] Pierre de Fermat (1601–1665) – prancūzų matematikas.
[2] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) – prancūzų matematikas.
[3] Leonhard Euler (1707–1783) – šveicarų matematikas.

tokios lygtys turi be galo daug sprendinių, ar jų sprendinių aibė yra baigtinė.

1 pavyzdys. Nedideliame kolektyve renkant labdarą kiekvienas vyras į labdaros fondą įmokėjo po 5 Lt, o kiekviena moteris – po 3 Lt. Iš viso buvo surinkti 32 Lt. Kiek vyrų ir kiek moterų šiame kolektyve?

Norėdami atsakyti į šį klausimą, pažymėkime x – vyrų skaičių, o y – moterų skaičių kolektyve. Pagal sąlygą šie skaičiai yra natūralieji ir turi tenkinti lygtį $5x+3y=32$. Taigi turime rasti diofantinės lygties natūraliuosius sprendinius. Nesunku patikrinti, kad tokie sprendiniai yra $x=1, y=9$ arba $x=4, y=4$.

Matome, kad kartais diofantinių lygčių sprendinius galima nustatyti tiesioginiu perrinkimu. Sunkiau būtų užrašyti visus tokių lygčių sveikuosius sprendinius.

Nagrinėkime (1) lygtį ir laikykime, kad jos koeficientai a,b,c – sveikieji skaičiai, neturintys didesnio už vienetą bendrojo daliklio, t. y. $DBD(a,b,c)=1$. Jeigu visi koeficientai dalytųsi iš skaičiaus, didesnio už vienetą, tai abi lygties puses galėtume padalyti iš šio skaičiaus.

Prisiminsime, kad sveikųjų skaičių a ir b *didžiausiu bendru dalikliu* vadinamas didžiausias skaičius, iš kurio dalijasi ir a, ir b. Jis žymimas $DBD(a,b)$ arba paprasčiau tiesiog (a,b). Analogiškai didžiausias bendras daliklis suvokiamas ir kai skaičių yra ne du, o daugiau.

Kartais iš karto galime pasakyti, kuomet (1) lygtis sveikaisiais skaičiais neišsprendžiama.

1 teorema. Jeigu (1) lygties koeficientų a ir b didžiausias bendras daliklis yra didesnis už vienetą, t. y. $(a,b)=d>1$, o c nesidalija iš d, tai lygtis sveikųjų sprendinių neturi.

Įrodymas. Kadangi $(a,b)=d>1$, tai $a=d\cdot a_1$ ir $b=d\cdot b_1$, $(a_1,b_1)=1$. Įrašę šias išraiškas į lygtį, turėsime: $da_1x+db_1y=c \Leftrightarrow$ $a_1x+b_1y=\frac{c}{d}$. Pastaroji lygtis sveikųjų sprendinių neturi, nes reiškinys $\frac{c}{d}$ nėra sveikasis skaičius.

Išvada. Jeigu lygtis $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$, turi sprendinį, tai c dalijasi iš d.

Pirmiausia ištirkime paprasčiausius (1) diofantinės lygties atvejus.

2 teorema. Lygties $ax+by=0$, $(a,b)=1$, visi sveikieji sprendiniai užrašomi formulėmis $x=-bt, y=at$, $t=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

Įrodymas. Išreiškę iš lygties kintamąjį *y*, turėsime $y=-\frac{a}{b}x$. Šio kintamojo reikšmė bus sveikasis skaičius tik tuomet, kai kintamojo *x* reikšmė dalysis iš *b*. Paimkime $x=-b\cdot t$ $(t=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$. Tuomet $y=a\cdot t$.

Pereinant prie bendrojo atvejo, iš pradžių įrodysime, kad užtenka žinoti vieną pirmojo laipsnio diofantinės lygties sprendinį – tuomet surasime ir visus.

3 teorema. Pažymėkime (x_0,y_0) kurį nors diofantinės lygties $ax+by=c$, $(a,b)=1$, sprendinį. Tuomet šios lygties sprendinių aibė yra $\{(x;y): x=x_0-bt,\ y=y_0+at,\ t=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$.

Įrodymas. Tarkime, (x,y) yra bet kuris nagrinėjamos lygties sprendinys. Tuomet iš lygybės $ax+by=c$ atėmę lygybę $ax_0+by_0=c$, gausime $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Iš čia $y-y_0=\frac{a(x_0-x)}{b}$. Kadangi $y-y_0$ sveikasis skaičius, o *a* ir *b* yra tarpusavyje pirminiai, tai $x_0-x=bt,\ t\in Z$. Tuomet $y-y_0=at$.

Taigi gavome diofantinės lygties $ax+by=c$ *bendrąjį sprendinį*

$$x=x_0-bt,\quad y=y_0+at,\quad t\in Z. \qquad (2)$$

Ir atvirkščiai, bet kuri sveikųjų skaičių pora, užrašyta (2) formulėmis, yra diofantinės lygties $ax+by=c$ sprendinys (įsitikinkite).

Vadinasi, jeigu mokėsime surasti vieną tiesinės diofantinės lygties sprendinį, tai pagal 3 teoremą užrašysime ir visą šios lygties sprendinių aibę.

Dar atkreipkime dėmesį, kad 2 teorema yra atskirasis 3 teoremos atvejis su $c=0$.

2 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $5x+3y=32$, t. y. suraskime lygties bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Nagrinėjamos lygties bendrąjį sprendinį pagal 3 teoremą galime užrašyti iš karto, nes žinomi netgi du jos sprendiniai (žr. 1 pavyzdį). Taigi $x=1-3t, y=9+5t$, $t\in Z$, yra bendrasis spren-

dinys. Taip pat bendrąjį sprendinį galima užrašyti ir taip: $x = 4 - 3t$, $y = 4 + 5t$, $t \in Z$. Nesunku įsitikinti, kad tiek pirmoji, tiek antroji bendrojo sprendinio išraiška reiškia tą pačią sveikųjų skaičių porų aibę.

Dabar įsivaizduokime, kad nežinome nė vieno lygties sprendinio. Pabandysime surasti šios lygties bendrąjį sprendinį tokiu būdu (I būdas).

Iš lygties $5x + 3y = 32$ išreikškime kintamąjį y: $y = \frac{32 - 5x}{3} = -x + \frac{32 - 2x}{3}$. Kadangi x ir y – sveikieji skaičiai, tai ir $\frac{32 - 2x}{3}$ – sveikasis. Pažymėkime jį: $t_1 = \frac{32 - 2x}{3}$. Iš čia $x = \frac{32 - 3t_1}{2} = -t_1 + \frac{32 - t_1}{2}$.

Toliau $t_2 = \frac{32 - t_1}{2} \in Z$ ir iš čia $t_1 = 32 - 2t_2$ yra sveikasis skaičius, kai $t_2 \in Z$. Tuomet

$$x = \frac{32 - 3t_1}{2} = \frac{32 - 3(32 - 2t_2)}{2} = -32 + 3t_2,$$

$$y = \frac{32 - 5x}{3} = \frac{32 - 5(-32 + 3t_2)}{3} = 64 - 5t_2, t_2 \in Z.$$

Užrašydami bendrąjį sprendinį, sveikąjį skaičių t_2 žymėkime tiesiog t. Tuomet bendrasis lygties sprendinys yra $x = -32 + 3t$, $y = 64 - 5t$, $t \in Z$.

Pateiksime dar vieną metodą tokioms lygtims spręsti (II būdas). Šiuo metodu naudojantis tam tikra racionaliųjų skaičių išraiška (vadinama grandinine trupmena) galima gauti lygties atskirąjį sprendinį, o po to pagal 3 teoremą – užrašyti ir bendrąjį sprendinį.

Racionalųjį skaičių $\frac{5}{3}$ užrašykime taip:

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Šitoks trupmenos $\frac{5}{3}$ užrašymas vadinamas jos skleidiniu *grandinine trupmena*. Atmeskime iš šio skleidinio paskutinę jos grandį, t. y. trupmeną $\frac{1}{2}$. Gausime skaičių $1+\frac{1}{1}=2$, kurį atimkime iš pradinės trupmenos: $\frac{5}{3}-2=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 5-3\cdot 2=-1$. Padauginę šios lygybės abi puses iš (-32), turėsime $5\cdot(-32)+3\cdot 64=32$. Sugretinę šią lygybę su nagrinėjama diofantine lygtimi $5x+3y=32$, matome, kad $(-32; 64)$ yra šios lygties sprendinys. Taigi bendrasis sprendinys gali būti užrašytas ir taip:

$$x=-32-3t,\ y=64+5t,\quad t\in Z.$$

Išspręskime dar vieną diofantinę lygtį abiem paminėtais metodais.

3 pavyzdys. Suraskime diofantinės lygties $127x-52y=1$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas.

I būdas. Iš lygties $127x-52y=1$ išreiškiame y:

$$y=\frac{127x-1}{52}=2x+\frac{23x-1}{52}.$$

Pažymėkime $t_1=\frac{23x-1}{52}$ ir tuomet

$$x=\frac{52t_1+1}{23}=2t_1+\frac{6t_1+1}{23}.$$

Pažymėkime $t_2=\frac{6t_1+1}{23}$. Iš čia $t_1=\frac{23t_2-1}{6}=3t_1+\frac{5t_2-1}{6}$. Tegu vėl: $t_3=\frac{5t_2-1}{6}\Rightarrow t_2=\frac{6t_3+1}{5}=t_3+\frac{t_3+1}{5}$. Toliau $t_4=\frac{t_3+1}{5}\Rightarrow t_3=5t_4-1$ – sveikasis skaičius, kai $t_4\in Z$. Tuomet:

$$t_2=\frac{6t_3+1}{5}=\frac{6(5t_4-1)+1}{5}=6t_4-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{23t_2-1}{6}=\frac{23(6t_4-1)-1}{6}=23t_4-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{52t_1 + 1}{23} = \frac{52(23t_4 - 4) + 1}{23} = 52t_4 - 9, t_4 \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{127x - 1}{52} = \frac{127(52t_4 - 9) - 1}{52} = 127t_4 - 22.$$

Taigi lygties bendrasis sprendinys (rašant $t_4 = t$) yra $x = 52t - 9,\ \ y = 127t - 22,\ \ t \in Z$.

II būdas. Pirmiausia trupmeną $\frac{127}{52}$ užrašykime grandinine trupmena:

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52} = 1 + \frac{1}{\frac{52}{23}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{6}{23}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}} =$$

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}.$$

Sutrumpintai ši grandininė trupmena paprastai užrašoma taip: $\frac{127}{52} = [2, 2, 3, 1, 5]$. Atmeskime šios grandininės trupmenos paskutinę grandį $\frac{1}{5}$ ir apskaičiuokime gautąją grandininę trupmeną $[2, 2, 3, 1]$:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}.$$

Apskaičiavę $\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}$ ir abi šios lygybės puses padauginę iš skaičiaus $(-52 \cdot 9)$, gauname lygybę $127 \cdot (-9) - 52 \cdot (-22) = 1$. Taigi radome lygties sprendinį $(-9; -22)$. Pagal 3 teoremą bendrasis lygties sprendinys toks:

$$x = -9 + 52t, \quad y = -22 + 127t, \quad t \in Z.$$

Spręsdami pavyzdžius naudojome grandinines trupmenas. Tačiau ar visuomet diofantinės lygties $ax+by=c$, kai $(a,b)=1$, koeficientų santykį $\frac{a}{b}$ galėsime užrašyti baigtine grandinine trupmena? Taip pat dar neaišku, ar iš to, kad c dalijasi iš $d=(a,b)$, išplaukia diofantinės lygties $ax+by=c$ išsprendžiamumas.

Norint atsakyti į šiuos klausimus, reikia kai kurių skaičių teorijos žinių.

Dalybos su liekana algoritmas. Bet kuriems dviems sveikiesiems skaičiams $a, b\,(a \neq 0, b \neq 0)$ egzistuoja sveikieji skaičiai q ir r $(0 \leq r < |b|)$, su kuriais galioja lygybė $a = b \cdot q + r$.

Tai įprastinė sveikųjų skaičių dalyba. Tik nustatant q ir r reikėtų atkreipti dėmesį į atvejus, kai bent vienas iš skaičių a, b yra neigiamas. Pavyzdžiui, kai $a=-26, b=7$, taikant šį algoritmą reikia rašyti $-26=7\cdot(-4)+2$, tačiau ne $-26=7\cdot(-3)-5$. Taigi čia $q=-4, r=2$. Plačiau skaičių dalumas nagrinėjamas leidinyje [2].

Euklido algoritmas. Euklido algoritmu vadinamas nuoseklus dalybos su liekana taikymas, kai iš pradžių sveikiesiems skaičiams a ir b surandami q_0 ir r, po to skaičiams b ir r surandami q_1 ir r_1, po to skaičiams r ir r_1 surandami q_2 ir r_2, ir taip procesas tęsiamas kol gaunama liekana, kuri lygi nuliui. Tarkime, kad $r_{k+1}=0$. Tai galime užrašyti lygybėmis:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r,\ 0 \leq r < |\,b\,|;\\
&b = rq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < r;\\
&r = r_1q_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1},\ 0 \leq r_{k-1} < r_{k-2};\\
&r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k,\ 0 \leq r_k < r_{k-1};\\
&r_{k-1} = r_kq_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Taigi, pritaikę Euklido algoritmą skaičiams a ir b, gauname dalmenų $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}$ seką (šie dalmenys vadinami *nepilnaisiais santykiais*) ir liekanų $r, r_1, r_2, \dots, r_k$ seką [1].

Atkreipkime dėmesį, kad kiekviena liekana yra būtinai mažesnė už prieš ją einančią liekaną. Dėl to *Euklido algoritmas visuomet turi pabaigą – yra baigtinis*.

Be to, *paskutinioji nelygi nuliui liekana* r_k *yra skaičių a ir b didžiausias bendras daliklis*: $r_k = (a,b)$.

Tai išplaukia iš (3) lygybių ir sveikųjų skaičių dalumo savybių. Tegu $(a,b) = d$. Tuomet iš pirmosios lygybės galime teigti, kad r dalijasi iš d, tuomet iš antrosios – r_1 dalijasi iš d, ir taip toliau, r_k dalijasi iš d.

Iš paskutiniosios lygybės matome, kad r_{k-1} dalijasi iš r_k, o iš aukštesnės lygybės – r_{k-2} dalijasi iš r_k, ir toliau eidami aukštyn gausime, kad b dalijasi iš r_k ir a dalijasi iš r_k, taigi ir d dalijasi iš r_k. Kadangi r_k dalijasi iš d ir d dalijasi iš r_k, tai $r_k = d$.

4 pavyzdys. Pritaikykime Euklido algoritmą skaičiams $a = 127$, $b = 52$.

Sprendimas. Pagal (3) formules gauname:

$$127 = 52 \cdot 2 + 23,$$
$$52 = 23 \cdot 2 + 6,$$
$$23 = 6 \cdot 3 + 5,$$
$$6 = 5 \cdot 1 + 1,$$
$$5 = 1 \cdot 5.$$

Pastaba. Kadangi paskutinioji nelygi nuliui liekana yra 1, tai iš Euklido algoritmo matome, kad $(a,b) = 1$.

Dar atkreipkime dėmesį į Euklido algoritmo, pritaikyto sveikiesiems skaičiams a ir b, ryšį su trupmenos $\frac{a}{b}$ skleidiniu grandinine trupmena. Ką tik nagrinėto 4 pavyzdžio nepilnieji santykiai yra 2, 2, 3, 1, 5 – tokie pat kaip ir grandininės trupmenos $[2, 2, 3, 1, 5] = \frac{127}{52}$ elementai.

Iš Euklido algoritmo išplaukia, kad *racionalusis skaičius* $\frac{a}{b}$ *vienareikšmiškai išreiškiamas baigtine grandinine trupmena, be to, jos*

elementai yra Euklido algoritmo, pritaikyto skaičiams a ir b, nepilnieji santykiai.

Vėl grįžkime prie diofantinių lygčių.

4 teorema. Tarkime, $(a,b)=d$. Tuomet egzistuoja sveikieji skaičiai m ir n, su kuriais galioja lygybė $am+bn=d$.

Įrodymas. Pritaikykime Euklido algoritmą. Iš (3) lygybių, pradėję priešpaskutiniąja ir nuosekliai įrašydami liekanų r_{k-1}, r_{k-2}, ..., r_1, r išraiškas, gausime:

$$d=r_k=r_{k-2}-r_{k-1}q_k=r_{k-2}-(r_{k-3}-r_{k-2}q_{k-1})q_k=$$
$$=-r_{k-3}q_k+r_{k-2}(1+q_kq_{k-1})=...=ma+nb.$$

Čia m ir n – sveikieji skaičiai.

5 teorema. Lygtis $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$, turi sprendinį, tik tuomet, kai c dalijasi iš d.

Įrodymas. Jeigu lygtis turi sprendinį, tai c dalijasi iš d (1 teoremos išvada).

Įrodykime: jei c dalijasi iš d, tai lygtis turi sprendinį.

Pagal 4 teoremą, yra sveikieji skaičiai m ir n, su kuriais galioja lygybė $am+bn=d$. Kadangi c dalijasi iš d, tai $c=d\cdot u$, $u\in Z$. Tuomet $a(m\cdot u)+b(n\cdot u)=d\cdot u \Leftrightarrow a(m\cdot u)+b(n\cdot u)=c$. Taigi lygtis $ax+by=c$ turi sprendinį – porą $(m\cdot u, n\cdot u)$.

Išsamiau išnagrinėjome tik pirmojo laipsnio su dviem nežinomaisiais diofantines lygtis. Minėti teiginiai nesunkiai apibendrinami ir pirmojo laipsnio diofantinėms lygtims su didesniu nežinomųjų skaičiumi. Tačiau šių klausimų, kaip ir aukštesnio laipsnio diofantinių lygčių, čia nenagrinėsime.

Literatūra

1. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.* Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 15–4.

2. E. Stankus. *Skaičių dalumas.* Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 8–14.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visus sveikuosius lygties $x + y = xy$ sprendinius.

2. Raskite visus sveikuosius lygties $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ sprendinius.

3. Raskite sveikuosius skaičius q ir r, su kuriais galioja lygybė $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < |b|$, kai $a = -38743$, $b = 213$.

4. Naudodamiesi Euklido algoritmu raskite skaičių 546 ir 231 bendrą didžiausią daliklį.

5. Raskite racionalųjį skaičių, užrašytą grandinine trupmena $[-7, 3, 1, 9]$.

6. Skaičių $\frac{129}{25}$ užrašykite grandinine trupmena.

7. Ar diofantinė lygtis $15x + 12y = 25$ turi sprendinių? Atsakymą pagrįskite.

8. Raskite diofantinės lygties $41x + 17y = 2$ bendrąjį sprendinį.

9. Išspręskite diofantinę lygtį $15x + 84y = 39$ jos bendrąjį sprendinį užrašydami dviem ekvivalenčiomis išraiškomis.

10. Raskite tiesės $10x + 11y = 15$ taškus su sveikosiomis koordinatėmis, kurių abscisės priklauso intervalui $[-10; 20]$.



IV. DAUGIANARIŲ DALUMAS

Laima Papreckienė
(Kauno technologijos universitetas)

1. **Vienanariai ir daugianariai.** *Vienanariu* vadinama skaitinio koeficiento ir raidėmis pažymėtų kintamųjų sandauga. Pavyzdžiui, $2ab$, x^2y^2z, $3{,}14d$ ir t. t. Kintamųjų reikšmės priklauso tam tikrai nurodytai skaičių aibei. *Panašiaisiais* vadinami vienanariai, kurie skiriasi tik koeficientais. Pavyzdžiui, vienanariai $5a^3bc^2$ ir $11a^3bc^2$ yra panašieji.

Daugianariais vadinama kelių vienanarių suma. Tokios sumos dar vadinamos *sveikaisiais racionaliaisiais reiškiniais*, siekiant juos atskirti nuo trupmeninių racionaliųjų reiškinių, kuriuose skaičius ir raidinius kintamuosius be sudėties ir daugybos ženklų dar sieja ir dalybos ženklas.

Jeigu vietoj kiekvieno kintamojo įrašytume nurodytos aibės kurį nors skaičių, tai gautume to *daugianario skaitinę reikšmę*. Pavyzdžiui, daugianario $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + x + 4$ reikšmė, kai $x = 2$, lygi

$$P(2) = 5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 4 = 40 - 12 + 6 = 34.$$

Du daugianariai yra vadinami *tapačiaisiais*, jeigu su visomis kintamųjų reikšmėmis jų atitinkamos skaitinės reikšmės sutampa. Lygybė, siejanti tapačiuosius reiškinius, vadinama tapatybe. Reiškinio pakeitimas jam tapačiu reiškiniu vadinamas *tapačiuoju pertvarkiu.*

Šioje temoje nagrinėsime *vienanarius* Ax^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *su vienu kintamuoju* ir iš jų sudarytus *daugianarius*:

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n, \ A_n \neq 0.$$

Tokie daugianariai yra vadinami *kanoninės formos daugianariais***.** Kartais daugianariai yra užrašomi kintamojo laipsnių mažėjimo tvarka.

Daugianario $P(x)$ *laipsniu* vadinamas didžiausias kintamojo x laipsnio rodiklis n, o daugianario *vyriausiuoju nariu* – narys A_nx^n, $A_n \neq 0$, su didžiausiuoju laipsnio rodikliu. Pirmojo laipsnio daugianariai paprastai yra vadinami *dvinariais*.

Daugianario $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$ koeficientai $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ gali būti bet kurie realieji skaičiai $(A_n \neq 0)$.

Matematikoje daug dėmesio skiriama daugianariams su sveikaisiais koeficientais. Tai susiję ir su tuo, kad kiekvieną daugianarį $P(x)$ su racionaliaisiais koeficientais galima išreikšti to paties laipsnio daugianariu $Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + ... + B_nx^n$ su sveikaisiais koeficientais: $P(x) = \lambda Q(x)$; čia λ – kuris nors racionalusis skaičius.

Algebros vadovėliuose įrodytos šios teoremos.

Teorema apie nulį. Jeigu su visomis realiosiomis kintamojo reikšmėmis daugianario reikšmė lygi nuliui, tai visi jo koeficientai lygūs nuliui.

Teorema apie tapatumą. Du n-tojo laipsnio daugianariai

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$$

ir

$$Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + ... + B_nx^n$$

yra tapatūs (rašoma $P(x) \equiv Q(x)$) tik tada, kai jų atitinkami koeficientai prie vienodų kintamojo laipsnių yra lygūs, t. y. $A_k = B_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Teorema apie daugybą. Dviejų daugianarių

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$$

ir

$$Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + ... + B_mx^m \quad (A_n \neq 0,\ B_m \neq 0)$$

sandauga yra $(m + n)$ laipsnio daugianaris.

Lengva sudauginti du dvinarius:

$$(A_0 + A_1x)(B_0 + B_1x) = A_0B_0 + (A_0B_1 + A_1B_0)x + A_1B_1x^2.$$

Pavyzdžiui, $(2 + 3x)(4 + 5x) = 8 + 22x + 15x^2$.

Daugiau atidumo reikia dauginant aukštesnio laipsnio daugianarius, nes kiekvieną pirmojo daugianario narį reikia sudauginti su kiekvienu antrojo daugianario nariu, sutraukti panašiuosius narius ir suteikti gautajam daugianariui kanoninę formą.

2. Daugianarių dalumas. Dviejų daugianarių dalyba yra panaši į sveikųjų skaičių dalybą, tačiau daug sudėtingesnė. Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad dalinio laipsnis turi būti ne mažesnis už daliklio laipsnį.

Suformuluosime *daugianario* $P(x)$ *dalybos iš daugianario* $Q(x)$ *taisyklę*:

1) dalinį $P(x)$ ir daliklį $Q(x)$ išdėstyti kintamojo x laipsnių *mažėjimo* tvarka;

2) dalinio $P(x)$ vyriausiąjį narį padalyti iš daliklio $Q(x)$ vyriausiojo nario (gautasis vienanaris yra dalmens $T(x)$ pirmasis narys;

3) daliklį $Q(x)$ padauginti iš dalmens $T(x)$ pirmojo nario ir gautąjį rezultatą (daugianarį) atimti iš dalinio $P(x)$ (šis skirtumas yra pirmoji liekana $R_1(x)$);

4) pirmąją liekaną $R_1(x)$ dalyti iš $Q(x)$ (pagal šios taisyklės 2 ir 3 punktus); dalmens $T_1(x)$ pirmasis narys yra dalmens $T(x)$ antrasis narys, o antrasis narys yra dalmens $T(x)$ trečiasis narys.

Dalyba tęsiama tol, kol gaunama lygi nuliui liekana arba kol liekanos $R(x)$ laipsnis yra mažesnis už daliklio $Q(x)$ laipsnį.

Aišku, kad lygią nuliui liekaną taip pat galima žymėti simboliu $R(x)$; todėl abiem atvejais galioja formulė:

$$P(x)=Q(x)\cdot T(x)+R(x).$$

Kai dalybos liekana lygi nuliui, sakoma, kad *daugianaris* $P(x)$ *dalijasi iš daugianario* $Q(x)$. Šiuo atveju gauname lygybę: $P(x)=Q(x)\cdot T(x)$.

1 pavyzdys.

$$\begin{array}{lrl}
 & -\,3x^3+4x^2+7x+2 & \underline{|\,3x+1\qquad} \\
 & \underline{3x^3+\ x^2\qquad\qquad} & \ x^2+x+2 \\
\text{1 liekana} & -\,3x^2+7x+2 & \\
 & \underline{3x^2+\ x\qquad} & \\
\text{2 liekana} & -\,6x+2 & \\
 & \underline{6x+2} & \\
\text{3 liekana} & 0 &
\end{array}$$

2 pavydys.

$$\begin{array}{r|l} x^2-4 & 3x-6 \\ \hline -\,\underline{x^2-2x} & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ 2x-4 & \\ -\,\underline{2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Abiejuose pavyzdžiuose liekanos yra lygios nuliui; todėl sakome, kad daugianaris ($3x^3+4x^2+7x+2$) dalijasi iš dvinario ($3x+1$), ir dvinaris (x^2-4) dalijasi iš dvinario ($3x-6$). Antrojo dalmens koeficientai – trupmeniniai skaičiai.

Abu daugianarius galima išreikšti sandaugomis:

$$3x^3+4x^2+7x+2=(3x+1)(x^2+x+2),$$

$$x^2-4=(3x-6)\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right).$$

Daugianarių dalumo savybės:

1 savybė. Jei daugianariai $P(x)$ ir $S(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, tai jų suma $P(x)+S(x)$ taip pat dalijasi iš daugianario $Q(x)$.

2 savybė. Jei daugianariai $P(x)$ ir $S(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, tai jų sandauga $P(x)S(x)$ taip pat dalijasi iš daugianario $Q(x)$.

3 savybė. Jei daugianaris $P(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, o $Q(x)$ – iš daugianario $U(x)$, tai $P(x)$ taip pat dalijasi iš $U(x)$.

Daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ *bendruoju dalikliu* vadinamas daugianaris, iš kurio dalijasi šie abu daugianariai, o jų *didžiausiu bendruoju dalikliu* (žym. $D(P,Q)$) – daugianaris, kuris dalijasi iš kiekvieno jų bendrojo daliklio. Didžiausią bendrąjį daliklį $D(P,Q)$ galima rasti pagal vadinamąjį *Euklido algoritmą*. Tarus, kad daugianario $P(x)$ laipsnis yra ne mažesnis už daugianario $Q(x)$ laipsnį, šį algoritmą galima užrašyti taip:

$$P(x)=Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x),$$
$$Q(x)=R_1(x)\cdot T_2(x)+R_2(x),$$
$$R_1(x)=R_2(x)\cdot T_3(x)+R_3(x),$$

....

$$R_{m-2}(x) = R_{m-1}(x) \cdot T_m(x) + R_m(x),$$
$$R_{m-1}(x) = R_m(x) \cdot T_{m+1}(x);$$

tada

$$D(P, Q) = R_m(x).$$

3 pavyzdys. Pritaikę Euklido algoritmą raskime daugianarių

$$P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 10$$

ir

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8$$

bendrąjį didžiausiąjį daliklį $D(P, Q)$.

Sprendimas. Daugianario $P(x)$ dalybos iš $Q(x)$ *liekana* yra $R_1(x) = 4x^3 + 9x^2 + 13x + 10$:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 10 =$$
$$= (x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8)x + (4x^3 + 9x^2 + 13x + 10).$$

Daugianario $Q(x)$ dalybos iš $R_1(x)$ *liekana* yra

$$R_2(x) = \frac{-39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16}:$$

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8) =$$
$$= (4x^3 + 9x^2 + 13x + 10)\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{-39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16}\right).$$

Pirmoji liekana $R_1(x)$ dalijasi iš antrosios liekanos $R_2(x)$:

$$4x^3 + 9x^2 + 13x + 10 =$$
$$= \left(\frac{-39}{16}(x^2 + x + 2)\right)\left(\frac{-16}{39}(4x + 5)\right) = (x^2 + x + 2)(4x + 5).$$

Vadinasi, antroji liekana $R_2(x)$ yra ieškomasis daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ didžiausias bendrasis daliklis:

$$D(P, Q) = -\frac{39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16}.$$

Šį daliklį galima užrašyti taip:

$$D(P, Q) = -\frac{39}{16}(x^2 + x + 2),$$

todėl daugianarį (x^2+x+2) taip pat galima laikyti didžiausiu bendruoju dalikliu.

3. Daugianario dalyba iš dvinario (*x*–*c*). Dalykime daugianarį

$$P(x)=A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0$$

iš dvinario $(x-c)$. Kadangi daliklis $(x-c)$ yra pirmojo laipsnio daugianaris, tai šios dalybos liekana R galėtų būti tik skaičius (nulinio laipsnio daugianaris); todėl toliau vietoj $R(x)$ rašysime R.

4 pavyzdys. Daugianarį $P(x)=4x^3+9x^2+7x+10$ dalykime iš dvinario $(x-c)$:

$$\begin{array}{l|l}
4x^3+9x^2+7x+10 & x-c \\ \cline{2-2}
-\underline{4x^3-4cx^2} & 4x^2+(4c+9)x+(4c^2+9c+7) \\
(4c+9)x^2+7x+10 & \\
-\underline{(4c+9)x^2-(4c^2+9c)x} & \\
(4c^2+9c+7)x+10 & \\
-\underline{(4c^2+9c+7)x-(4c^3+9c^2+7c)} & \\
4c^3+9c^2+7c+10 &
\end{array}$$

Taigi gavome liekaną $R=4c^3+9c^2+7c+10$. Ši liekana yra daugianario $P(x)$ reikšmė taške $x=c$, t. y. $R=P(c)$.

Tokį pat rezultatą, (t. y. $R=P(c)$) gautume dalydami iš dvinario $(x-c)$ bet kurio laipsnio daugianarį $P(x)$.

Šį teiginį 1779 m. paskelbė Bezu (*Bezout*[1]), nagrinėjęs algebrinių lygčių teoriją.

Bezu teorema. Daugianario $P(x)$ dalybos iš dvinario $(x-c)$ liekana R yra lygi $P(c)$.

Skaičius c, su kuriuo galioja lygybė $P(c)=0$, yra vadinamas *daugianario* $P(x)$ *šaknimi.*

---

[1] Etienne Bezout (1730–1783) – prancūzų matematikas.

Taigi, galima teigti, kad *daugianaris* $P(x)$ *dalijasi* iš $(x-c)$ *tada ir tik tada, kai c yra P(x) šaknis.*

Daugianario $P(x)$ dalybos iš dvinario $(x-c)$ dalmenį

$$T(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \ldots + B_0$$

ir liekaną R galima rasti tiesiogiai dalijant kampu $P(x)$ iš $(x-c)$.

Pagal dalybos apibrėžimą turi galioti tapatybė:

$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0 \equiv$$
$$\equiv (B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \ldots + B_0)(x-c) + R$$

Sudauginus ir atlikus veiksmus, ją galima užrašyti taip:

$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0 \equiv$$
$$\equiv B_{n-1}x^n + (B_{n-2} - B_{n-1}c)x^{n-1} + (B_{n-3} - B_{n-2}c)x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (B_0 - B_1 c)x + R - B_0 c.$$

Remdamiesi teorema apie daugianarių tapatumą, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} B_{n-1} = A_n, \\ B_{n-2} - B_{n-1}c = A_{n-1}, \\ B_{n-3} - B_{n-2}c = A_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0 - B_1 c = A_1, \\ R - B_0 c = A_0. \end{cases}$$

Iš šios sistemos nesunku rasti koeficientus B_{n-1}, B_{n-2}, $B_{n-3}, \ldots, B_1, B_0$ ir liekaną R.

Dalmens $T(x)$ koeficientams B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ bei liekanai R apskaičiuoti sudaroma lentelė, kuri vadinama *Hornerio schema*:

	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}
c	$B_{n-1} = A_n$	$B_{n-2} = A_{n-1} + B_{n-1} \cdot c$	$B_{n-3} = A_{n-2} + B_{n-2} \cdot c$

...	A_1	A_0
...	$B_0 = A_1 + B_1 \cdot c$	$R = A_0 + B_0 \cdot c$

Šį metodą 1802 m. paskelbė Ruffinis (Ruffini[1]), o 1819 m. – Horneris (Horner[2]). Tačiau Kinijos matematikai jį žinojo žymiai anksčiau ir vadino Tian Juanio metodu.

Pritaikę Hornerio schemą, rasime jau nagrinėto (žr. 4 pvz.) daugianario $P(x)=4x^3+9x^2+7x+10$ dalybos iš dvinario $(x-c)$ liekaną. Lentelės pirmoje eilutėje įrašę šio daugianario koeficientus, antroje eilutėje rašome skaičių c ir su juo apskaičiuotus dalmens koeficientus ir liekaną:

	4	9	7	10
c	4	$9+4c$	$7+(4c+9)\cdot c=$ $=4c^2+9c+7$	$10+(4c^2+9c+7)\cdot c=$ $=4c^3+9c^2+7c+10$

5 pavyzdys. Įsitikinkime, kad skaičius 1 yra daugianario x^3+x-2 šaknis.

Sprendimas. Hornerio lentelės pirmoje eilutėje įrašome koeficientus prie x^3, x^2, x ir laisvąjį narį –2, o antroje – skaičių 1 ir gaunamus rezultatus:

	1	0	1	–2
1	1	$0+1=1$	$1+1=2$	$R=-2+2=0$

Kadangi $R=0$, tai 1 yra daugianario (x^3+x-2) šaknis.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite daugianarių

$P(x)=5x^4-2x^3+2x^2+2x-7$ ir $Q(x)=5x^3+13x^2+x+21$

didžiausią bendrąjį daliklį $D(P,Q)$.

2. Raskite daugianarių

$P(x)=x^4+x^3-3x^2-8x-6$ ir $Q(x)=x^3+6x^2+10x+8$

didžiausią bendrąjį daliklį $D(P,Q)$.

---

[1] Paolo Ruffini (1765–1822) – italų matematikas.

[2] William George Horner (1786–1837) – anglų matematikas.

3. Pritaikę Bezu teoremą, raskite daugianario $(x^3+6x^2+10x+8)$ dalybos iš $(x+4)$ ir iš $(x-4)$ liekanas.

4. Pritaikę Bezu teoremą, patikrinkite, ar daugianaris

$$P(x)=5x^4-2x^3+2x^2+2x-7$$

dalijasi iš dvinario $(x-1)$.

5. Daugianario $(6x^3-7x^2-16x+m)$ viena šaknis lygi 2. Raskite koeficientą m ir kitas dvi šio daugianario šaknis.

6. Su kuriomis koeficientų m ir n reikšmėmis daugianaris $(2x^3+mx^2-13x+n)$ turi šaknis 2 ir 3? Apskaičiuokite ir trečiąją šaknį.

7. Pritaikę Hornerio schemą, apskaičiuokite daugianario

$$P(x)=7x^6-14x^5+3x^3-7x^2+3x-2$$

dalybos iš dvinario

a) $x-1$; **b)** $x+1$; **c)** $x-2$; **d)** $x+2$

dalmens koeficientus ir liekaną.

8. Pritaikę Hornerio schemą, nustatykite, ar daugianaris $(4x^3+9x^2+13x+10)$ dalijasi iš dvinario $(x+2)$.

9. Esant kuriai koeficiento m reikšmei daugianaris

$$x^4-x^3+mx^2+10x-4$$

turi dvi šaknis, kurių sandauga lygi 2?

10. Raskite didžiausią laipsnio rodiklį n, kuriam esant daugianaris $(x^5-x^4-6x^3+14x^2-11x+3)$ dalijasi iš $(x-1)^n$.



V. NIUTONO BINOMAS

Antanas Apynis, Juozas Šinkūnas
(Vilniaus universitetas, Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Kiek poaibių turi aibė? Pirmiausia prisiminkime, kad aibė yra suvokiama kaip tam tikra matematinių objektų (skaičių, geometrinių figūrų ir kt.) visuma. Žodis „visuma" čia tėra „aibės" sinonimas. Visumą (aibę) sudarantys objektai yra vadinami *aibės elementais*. Aibės paprastai žymimos didžiosiomis raidėmis, pavyzdžiui, A, B, C, ..., o jų elementai – mažosiomis. Užrašas $a \in A$ reiškia, kad a yra aibės A elementas, o užrašas $a \notin A$ reiškia, kad a nepriklauso aibei A (nėra jos elementas). Aibių elementai išvardijami arba kitaip apibūdinami vartojant skliaustelių porą $\{...\}$.

Tegu A ir B yra dvi aibės, kurių elementus sieja toks sąryšis:

$$x \in A \Rightarrow x \in B .$$

Tada sakoma, kad aibė A yra aibės B *poaibis*, o matematiniais simboliais užrašoma taip: $A \subset B$.

Pasirinkime aibę A, turinčią n elementų a_i, $i = 1, 2, ..., n$. Ją galima užrašyti taip: $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad elementų rašymo tvarka (eiliškumas) yra visai nesvarbi, nes aibę nusako tik jos elementai. Pabandykime išsiaiškinti, kiek poaibių turi aibė A.

Pirmiausia sugrupuokime aibės A poaibius pagal elementų skaičių juose. Turėsime vieną aibę be elementų (tai tuščioji aibė $\varnothing$ – ji irgi laikoma poaibiu) ir vieną aibę, turinčią n elementų (tai aibė A). Aišku, kad galima sudaryti n poaibių po vieną elementą:

$$\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}.$$

Tiek pat yra ir poaibių po $(n-1)$ elementą:

$$\{a_1; a_2; ...; a_{n-1}\}, \{a_1; a_2; ...; a_{n-2}; a_n\}, ..., \{a_2; a_3; ...; a_n\}.$$

Aibės A poaibių po k elementų $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ skaičių pažymėkime C_n^k. Apatinis indeksas n rodo aibės A elementų skaičių, o viršutinis indeksas k yra poaibio elementų skaičius. Tada bendras aibės A poaibių skaičius (jį pažymėkime m) yra

$$m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n. \quad (1)$$

Jau žinome, kad $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^{n-1} = n$ ir $C_n^n = 1$. Apskaičiuokime C_n^2, ..., C_n^{n-2}. Pasirinkime $k \in \{2; ...; n-2\}$ ir nagrinėkime aibės A poaibius po k elementų. Tegu G_1 yra poaibių, kuriems priklauso elementas a_1, grupė, G_2 – poaibių, kuriems priklauso elementas a_2, grupė. Analogiškai apibūdinkime poaibių grupes G_3, ..., G_n. Aišku, kad kiekvienoje iš šių grupių yra C_{n-1}^{k-1} aibės A poaibių po k elementų. Susumavę visų grupių ($G_1, G_2, ..., G_n$) poaibių skaičius gausime skaičių $n\,C_{n-1}^{k-1}$.

Lengva suvokti, kad, pavyzdžiui, poaibis $\{a_1; a_2; ...; a_k\}$ yra k grupėse – $G_1, G_2, ..., G_k$. Aišku, kad ir bet kuris kitas poaibis yra k grupėse. Vadinasi, skaičių C_n^k galima užrašyti tokia formule:

$$C_n^k = \frac{nC_{n-1}^{k-1}}{k}, \ (k = 2, 3, ..., n-2). \quad (2)$$

Pagal šią formulę gauname:

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2}}{k-1},$$

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2) \cdot C_{n-3}^{k-3}}{k-2},$$

....

$$C_{n-(k-2)}^{k-(k-2)} = C_{n-k+2}^2 = \frac{(n-k+2) \cdot C_{n-(k-1)}^{k-(k-1)}}{k-(k-2)} =$$

$$= \frac{(n-k+2) \cdot C_{n-k+1}^1}{2},$$

$$C_{n-k+1}^1 = n-k+1.$$

Nuosekliai įrašydami šias išraiškas į (2) formulę, gausime:

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot ... \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Taigi išvedėme formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \ (k = 2, 3, \ ..., n-2). \qquad (3)$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad simboliui $0!$ yra priskiriama reikšmė 1 $(0! = 1)$. Tada pagal (3) formulę gauname:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1,$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = 1.$$

Taip pat gauname:

$$C_n^1 = n \text{ ir } C_n^{n-1} = n.$$

Matome, kad (3) formulė tinka poaibiams skaičiuoti ir tada, kai $k \in \{0; 1; n-1; n\}$.

Išvada tokia: aibės $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ poaibių po k elementų skaičių C_n^k, $k = 0, 1, 2, ..., n$, galima rasti pagal formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (4)$$

Pastaba. Aibės $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ poaibiai po k elementų kombinatorikoje yra vadinami aibės A elementų *deriniais* po k elementų. Tada skaičius C_n^k yra vadinamas *derinių skaičiumi iš n elementų po k elementų* ($k = 0, 1, 2, ..., n$).

Dar turėtume atsakyti į klausimą, kiek iš viso poaibių turi aibė $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$. Kitaip sakant, turėtume rasti (1) sumą:

$$m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

Tačiau šią problemą atidėkime. Prie jos sugrįšime nagrinėdami dvinario $(x+a)$ laipsnius $(x+a)^n$, $n = 1, 2, ...$.

2. Dvinario kėlimas laipsniu. Nagrinėkime dvinario $(x+a)$ laipsnius $(x+a)^n$, kai n yra natūralieji skaičiai, o x ir a – kurie nors realieji skaičiai. Gerai žinome, kad

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Gana lengva rasti ir aukštesnių laipsnių skleidinius:

$$(x+a)^4 = (x+a)^3(x+a) =$$
$$= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)\cdot(x+a) =$$
$$= x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + a^3 + ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4 =$$
$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$

$$(x+a)^5 = (x+a)^4(x+a) =$$
$$= x^5 + 4ax^4 + 6a^2x^3 + 4a^3x^2 + a^4x + ax^4 + 4a^2x^3 + 6a^3x^2 + 4a^4x + a^5 =$$
$$= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Analogiškai galima skaičiuoti ir toliau. Tačiau toks skaičiavimo būdas nelabai patogus. Todėl pabandykime atidžiau įsižiūrėti kaip susidaro skleidinio koeficientai.

Pirmiausia atkreipkime dėmesį į tai, kad laipsnį $(x+a)^n$ su natūraliuoju rodikliu n galima suvokti kaip dvinarių $(x+a_1)$, $(x+a_2)$, ..., $(x+a_n)$ sandaugą

$$(x+a_1)\,(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)$$

su sąlyga $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.

Matome, kad

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2,$$
$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) =$$
$$= x^3 + (a_1 + a_2)x^2 + a_1a_2x + a_3x^2 + (a_1 + a_2)a_3x + a_1a_2a_3 =$$
$$= x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3.$$

Lengva suprasti, kad

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 +$$
$$+ (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 +$$

$+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.$

Dėsningumas aiškus – sandauga

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)$$

yra daugianaris

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_kx^{n-k}+\ldots+b_{n-1}x+b_n,$$

kurio koeficientai $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_n$ yra tokie:

b_1 – skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suma;

b_2 – sandaugų a_ia_j, $i<j$, suma;

....

b_k – visų galimų sandaugų $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}$, $(i_1<i_2< \;<\ldots<i_k)$ suma, kai $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ yra aibės $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ skaičiai;

$b_n=a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$.

Kai $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$, šiuos skleidinio koeficientus galima užrašyti tokiomis formulėmis:

$$b_1=B_n^1a,\; b_2=B_n^2a^2,\; \ldots,\; b_k=B_n^ka^k,\; \ldots,\; b_n=B_n^na^n.$$

Aišku, kad koeficientas B_n^1 yra aibės $A=\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ poaibių po vieną elementą skaičius, koeficientas B_n^2 – šios aibės poaibių po du elementus skaičius ir t. t. Taigi

$$B_n^k=C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},\quad k=1,2,\ldots,n;$$

todėl

$$(x+a)^n=x^n+B_n^1ax^{n-1}+B_n^2a^2x^{n-2}+\ldots+B_n^{n-1}a^{n-1}x+B_n^na^n=$$
$$=C_n^0a^0x^n+C_n^1ax^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}a^{n-1}x^1++C_n^na^nx^0,$$

o vartojant sumavimo simbolį Σ (sigma) – formule

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kx^{n-k}. \qquad (5)$$

Gautoji formulė yra vadinama *Niutono binomu*. Formulės dėmenys $C_n^ka^kx^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$, vadinami *Niutono binomo nariais*, o koeficientai C_n^k, $k=0,1,2,\ldots,n$ – *binominiais koeficientais*.

Kai x yra kintamasis dydis, o a – pastovus, tai pagal Niutono binomo formulę (5) gauname laipsnio $(x+a)^n$ skleidinį daugianariu dydžio x laipsniais:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

Skaičiai 1, $C_n^1 a$, $C_n^2 a^2$, ..., $C_n^{n-1} a^{n-1}$ yra vadinami šio *skleidinio koeficientais*, o a^n – *laisvuoju nariu*. Bendroji skleidinio koeficiento prie x^{n-k} formulė yra $C_n^k a^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ji tinka ir laisvajam nariui (imant $k = n$).

Pastaba. Numeruodami Niutono binomo narius

$$C_n^k a^k x^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \quad \ldots, n,$$

vartosime tik natūraliuosius skaičius. Todėl narį $C_n^0 a^0 x^{n-0} = C_n^0 x^n = x^n$ vadinsime pirmuoju nariu, narį $C_n^1 a^1 x^{n-1} = C_n^1 a x^{n-1}$ – antruoju nariu ir t. t.

3. Binominių koeficientų savybės ir jų taikymo pavyzdžiai.

1 savybė. $$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \qquad (6)$$

Įrodymas. Pagal Niutono binomo formulę gauname:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Taigi (6) lygybė tikrai galioja.

Išvada. Aibės $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ poaibių skaičius yra lygus 2^n.

Ši išvada išplaukia iš (1) ir (6) formulių.

2 savybė. Su visais k, priklausančiais aibei $\{1; 2; \ldots; n\}$, galioja lygybė

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (7)$$

Įrodymas. Pagal (5) formulę

$$(x+a)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 a x^n +$$

$$+ C_{n+1}^2 a^2 x^{n-1} + \ldots + C_{n+1}^n a^n x + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1},$$

o pagal laipsnio apibrėžimą ir tą pačią (5) formulę gauname:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) = (C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} +$$

$$+C_n^2a^2x^{n-2}+...+C_n^{n-1}a^{n-1}x+C_n^na^n)(x+a)=$$
$$=C_n^0x^{n+1}+C_n^1ax^n+C_n^2a^2x^{n-1}+...+C_n^{n-1}a^{n-1}x^2+C_n^na^nx+$$
$$+C_n^0ax^n+C_n^1a^2x^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-1}x^2+C_n^{n-1}a^nx+C_n^na^{n+1}=$$
$$=C_n^0x^{n+1}+(C_n^1+C_n^0)ax^n+(C_n^2+C_n^1)a^2x^{n-1}+...+$$
$$+(C_n^{n-1}+C_n^{n-2})a^{n-1}x^2+(C_n^n+C_n^{n-1})a^nx+C_n^na^{n+1}.$$

Sugretinę abu rezultatus, matome, kad

$$C_{n+1}^0=C_n^0=1,\ C_{n+1}^{n+1}=C_n^n=1$$

ir

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1},\ \text{kai}\ k=1,2,...,n.$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad (7) formulė sutampa su Paskalio trikampio skaičių formule. Žinių apie Paskalio trikampį yra įvairiose matematikos knygose, taip pat V. Stakėno straipsnelyje „Paskalio trikampis", kurį galima rasti LJMM šeštojoje knygelėje „Jaunajam matematikui" (V.: Danieliaus leidykla, 2005) arba LJMM interneto svetainėje (www.mif.vu.lt/ljmm; 2003–2005, ketvirtoji užduotis).

3 savybė. $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=0.$ (8)

Įrodymas. Kai $x=1$ ir $a=-1$, pagal Niutono formulę (5) gauname:

$$(1+(-1))^n=C_n^0+C_n^1\cdot(-1)+C_n^2\cdot(-1)^2+...+C_n^{n-1}(-1)^{n-1}+C_n^n(-1)^n.$$

Taigi (8) formulė galioja.

Atkreipkime dėmesį, kad (8) formulę galima užrašyti ir kitaip.

Tarkime, kad n yra lyginis natūralusis skaičius. Tada jį galima užrašyti pavidalu $n=2m$, m – natūralusis skaičius. Šiuo atveju $(-1)^n=(-1)^{2m}=1$, todėl (8) formulėje teigiamų dėmenų būtų tiek pat, kiek neigiamų, o jų sumos būtų lygios. Taigi turėtume formulę

$$C_{2m}^0+C_{2m}^2+...+C_{2m}^{2m}=C_{2m}^1+C_{2m}^3+...+C_{2m}^{2m-1}.$$

Nelyginio skaičiaus n atveju gautume tokią formulę:

$$C_{2m-1}^0+C_{2m-1}^2+...+C_{2m-1}^{2m-2}=C_{2m-1}^1+C_{2m-1}^3+...+C_{2m-1}^{2m-1}.$$

4 savybė. $C_n^k=C_n^{n-k},\ k=0,1,2,...,n.$ (9)

Įrodymas. Taikydami (3) formulę, gauname:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ir

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Sugretinę abu rezultatus, matome, kad iš tiesų (9) lygybė galioja su visais k, kurie priklauso aibei $\{0; 1; 2; ...; n\}$.

Išspręskime kelis uždavinius.

1 uždavinys. Apskaičiuokime sumą

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n,$$

kai C_n^k, $k = 1, 2, 3, ..., n$, yra binominiai koeficientai.

Sprendimas. Pagal 4 savybę, t. y. (9) formulę

$$C_n^1 = C_n^{n-1},\ C_n^2 = C_n^{n-2},\ C_n^3 = C_n^{n-3},\ ...,\ C_n^{n1} = C_n^0,$$

todėl

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n =$$
$$= C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + ... + (n-1)C_n^1 + nC_n^0.$$

Iš čia (ieškomąją sumą pažymėję S_n) gauname:

$$2S_n = (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n) +$$
$$+ (nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + (n-3)C_n^3 + ... + C_n^{n-1}) =$$
$$= n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n) = n \cdot 2^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = n2^{n-1}.$$

Ats.: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$.

2 uždavinys. Niutono binomo $\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4}\right)^n$ trečio nario ir trečio nuo galo nario binominių koeficientų suma yra lygi 9 900. Raskime šio skleidinio racionaliųjų narių skaičių.

Sprendimas. Pagal 4 savybę $C_n^2 = C_n^{n-2}$, todėl

$$C_n^2 + C_n^{n-2} = 9\,900 \Rightarrow 2C_n^2 = 9\,900 \Rightarrow C_n^2 = 4\,950.$$

Iš čia gauname $n = 100$.

Skleidinio (pagal Niutono binomo formulę) narius pažymėkime T_k, $k = 0, 1, 2, ..., 100$.

Pagal (5) formulę:

$$T_k = C_{100}^k \cdot 4^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{100-k}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 100.$$

Skaičius T_k yra racionalus tik tada, kai $k = 3l$ ir $100 - k = 4p$; čia l ir p – kurie nors neneigiami sveikieji skaičiai. Tada

$$100 - 4p = 3l \Rightarrow 4(25 - p) = 3l \Rightarrow 25 - p$$

dalijasi iš $3 \Rightarrow p \in \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25\}$.

Ats.: devyni nariai.

3 uždavinys. Raskime x reikšmę, su kuria Niutono binomo

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^n$$

ketvirtasis narys yra 20 kartų didesnis už n, jeigu ketvirtojo nario binominio koeficiento ir antrojo nario binominio koeficiento santykis yra $5:1$.

Sprendimas. Pagal sąlygą gauname:

$$C_n^3 : C_n^1 = 5:1 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} : \frac{n!}{1!(n-1)!} = 5:1 \Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Rightarrow n = 7.$$

Toliau sprendžiame lygtį:

$$C_7^3\left(\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{7-3} = 20 \cdot 7 \Rightarrow \frac{7!}{3!4!} \cdot 2^{-x} \cdot 2^{2x-2} = 140 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 \cdot 2^{x-2} = 140; \; x = 4.$$

Ats.: 4.

4. Polinominė formulė. Susipažinkime su dėsningumais, kuriuos galima stebėti skaičiuojant sumos $(x_1 + x_2 + ... + x_m)$ laipsnį $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$, kai laipsnio rodiklis yra bet kuris natūralusis skaičius. Aišku, kad $m = 2$ atveju gautume Niutono binomo formulę

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_1^{n-k} x_2^k.$$

Pažymėję $k_1 = n - k$, $k_2 = k$ ir pasinaudoję (3) formule, šį skleidinį galėtume užrašyti taip:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k_1 + k_2 = n} \frac{n!}{k_1! k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ; \qquad (10)$$

čia simbolis „ $\sum\limits_{k_1 + k_2 = n}$ “ reiškia, kad sumuojami visi dėmenys $\frac{n!}{k_1! k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, kuriuose k_1 ir k_2 yra neneigiami sveikieji skaičiai, o jų suma $(k_1 + k_2)$ lygi skaičiui n.

Taikydami Niutono binomo formulę, galėtume rasti trijų skaičių, tarkime, x_1, x_2 ir x_3 sumos $(x_1 + x_2 + x_3)$ laipsnio $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ skleidinį:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = ((x_1 + x_2) + x_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x_1 + x_2)^{n-k} x_3^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l x_1^{n-k-l} x_2^l \right) x_3^k . \qquad (11)$$

Atkreipkime dėmesį į vieną atvejį skaičiuojant sumą $\sum\limits_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l x_1^{n-k-l} x_2^l$. Kai $k = n$, tai gausime $n - k = 0$. Tada turėsime formalią sumą $\sum\limits_{l=0}^{0} C_0^l x_1^{-l} x_2^l$, sudarytą iš vienintelio dėmens $C_0^0 x_1^0 x_2^0 = C_0^0 = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$ (čia prisiminkime, kad $0! = 1$).

Pažymėję $k_1 = n - k - l$, $k_2 = l$ ir $k_3 = k$, (11) reiškinį galėtume užrašyti taip:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1-k_3} C_n^{k_3} C_{n-k_3}^{k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} , \; k_1 = n - k_2 - k_3 .$$

Skaičiuodami sandaugą $C_n^{k_3} \cdot C_{n-k_3}^{k_2}$, gauname:

$$C_n^{k_3} \cdot C_{n-k_3}^{k_2} = \frac{n!}{k_3!(n-k_3)!} \cdot \frac{(n-k_3)!}{k_2!(n-k_3-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}.$$

Taigi

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1-k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3};$$

čia $k_1 = n - k_2 - k_3$, t. y. $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Pastaroji formulė paprastai užrašoma taip:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}. \qquad (12)$$

Nesigilindami į skaičiavimo bei įrodymo subtilumus, pateiksime tik galutinį laipsnio $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$ skleidinio daugianariu formulę:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!...\,k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_m^{k_m}. \quad (13)$$

Ši formulė yra vadinama *polinomine formule*. Joje $k_1, k_2, ..., k_m$ yra sveikieji skaičiai, priklausantys aibei $\{0; 1; 2; ...; n\}$. Sumuojama sudarant visus įmanomus jų rinkinius taip, kad laipsnių rodiklių suma $(k_1 + k_2 + ... + k_m)$ būtų lygi n.

4 uždavinys. Raskime laipsnio $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ skleidinio x laipsniais koeficientą prie x^4.

Sprendimas. Taikykime polinominę formulę (12), kai $x_1 = 1$, $x_2 = 2x$, $x_3 = 3x^2$. Gausime:

$$(1 + 2x + 3x^2)^{10} = \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} 1^{k_1} (2x)^{k_2} (3x^2)^{k_3} =.$$

$$= \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} 1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot x^{k_2+2k_3}. \qquad (14)$$

Dėmenį su laipsniu x^4 turėsime tik tada, kai $k_2+2k_3=4$ ir $k_1+k_2+k_3=10$. Spręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} k_2+2k_3=4, \\ k_1+k_2+k_3=10. \end{cases}$$

Gausime tokius skaičių k_1, k_2 ir k_3 trejetus $(k_1;k_2;k_3)$: $(6;4;0), (7;2;1)$, $(8;0;2)$.

Vadinasi, (14) sumoje yra trys dėmenys su x^4. Belieka sudėti koeficientus:

$$\frac{10!}{6!\,4!\,0!}2^4\cdot 3^0+\frac{10!}{7!\,2!\,1!}2^2\cdot 3^1+\frac{10!}{8!\,0!\,2!}2^0\cdot 3^2=8\,085.$$

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite:

$$3C_n^1+7C_n^2+11C_n^3+...+(4n-1)C_n^n.$$

2. Esant kurioms x reikšmėms Niutono binomo $(5+2x)^{16}$ skleidinio ketvirtasis narys yra didesnis už gretimus jo narius?

3. Niutono binomo $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ skleidinio trečiajame naryje nėra x. Esant kurioms x reikšmėms šis narys lygus Niutono binomo $(1+x^3)^{30}$ skleidinio antrajam nariui?

4. Raskite Niutono binomo $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ skleidinio didžiausią binominį koeficientą, jeigu ketvirtojo nuo pradžios ir ketvirtojo nuo galo narių sandauga lygi 14 400.

5. Skirtumas tarp Niutono binomo $(a+b)^{n+1}$ skleidinio trečiojo nario ir Niutono binomo $(a+b)^n$ skleidinio trečiojo nario binominių koeficientų lygus 225. Raskite Niutono binomo $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^n$ skleidinio narių su sveikaisiais x ir y laipsniais skaičių.

6. Niutono binomo

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

skleidinio pirmieji trys koeficientai prie kintamojo x sudaro aritmetinę progresiją. Raskite visus skleidinio narius su sveikaisiais x laipsniais.

7. Kurio iš skleidinių, $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ar $(1-x^2+x^3)^{1000}$, koeficientas prie x^{17} yra didesnis?

8. Raskite reiškinio $\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}$ skleidinio narį, kuriame nėra x.

9. Kiek yra narių su skirtingais x laipsniais reiškinio $(1+x^2+x^5)^{20}$ skleidinyje?

10. Raskite visus Niutono binomo $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ skleidinio narius su sveikaisiais x laipsniais, jeigu binominių koeficientų, esančių lyginėse skleidinio vietose, suma yra lygi 2048.



VI. LOGARITMINĖS IR RODIKLINĖS LYGTYS, NELYGYBĖS IR TAPATYBĖS

Erika Tumėnaitė
(Panevėžio Juozo Balčikonio gimnazija)

Ši tema yra vidurinės mokyklos matematikos programos dalis, todėl priminsime tik svarbiausias sąvokas ir savybes, kurių prireiks atliekant užduotį.

Rodiklinėmis lygtimis vadinamos tokios lygtys, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklyje, o *logaritminėmis* – tokios, kurių nežinomasis yra po logaritmo ženklu.

Sprendžiant rodiklines lygtis remiamasi šiuo teiginiu: jei $a > 0$, $a \neq 1$, tai

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Rodiklinių lygčių sprendimo būdai:

1) suvienodinant pagrindus,
2) iškeliant prieš skliaustus bendrą daugiklį,
3) keičiant kintamąjį.

Sprendžiant logaritmines lygtis labai praverčia logaritmo pagrindo keitimo formulė

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1; b > 0; c > 0, c \neq 1),$$

kurios atskirasis atvejis yra formulė

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1).$$

Neužmirškime ir kitų formulių:

$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$;

$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$;

$\log_c(b^m) = m\log_c b$;

$\log_{c^n} b = \frac{1}{n}\log_c b$;

$\log_{c^k}(b^k) = \log_c b$.

Šiose formulėse $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, n \neq 0, k \neq 0$.

Taip pat yra svarbūs šie teiginiai:

1. *Logaritminė lygtis*

$$\log_a f(x) = b$$

yra ekvivalenti lygčiai

$$f(x) = a^b\ ;$$

čia $a > 0, a \neq 1$.

2. *Logaritminė lygtis*

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Logaritminėmis ir rodiklinėmis tapatybėmis yra vadinamos lygtys, kurių sprendinių aibės sutampa su šių lygčių apibrėžimo sritimis.

Rodiklinėmis nelygybėmis yra vadinamos nelygybės, kurių kintamasis yra laipsnio rodiklyje, o *logaritminėmis* – tokios, kurių kintamasis yra po logaritmo ženklu. Ir rodiklinių nelygybių, ir logaritminių nelygybių sprendimas yra grindžiamas tuo, kad funkcijos $y = a^x$ ir $y = \log_a x$ yra didėjančios, kai $a > 1$, ir mažėjančios, kai $0 < a < 1$.

Sprendžiant nelygybes reikia atkreipti dėmesį į šiuos teiginius:

3. *Rodiklinė nelygybė*

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

yra ekvivalenti nelygybei $f(x) \geq g(x)$, *kai* $a > 1$; ji yra ekvivalenti *nelygybei* $f(x) \leq g(x)$, *kai* $0 < a < 1$.

4. *Logaritminė nelygybė*

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1 \end{cases}$$

arba nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a(x) < 1. \end{cases}$$

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36.$$

Sprendimas. Matome, kad $x = 1$ nėra šios lygties sprendinys. Aišku, turi būti $x > 0$.

Pertvarkykime lygtį keisdami logaritmų pagrindus:

$$\frac{1}{\log_x \sqrt{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[6]{3}} + \ldots + \frac{1}{\log_x \sqrt[16]{3}} = 36,$$

$$\frac{2}{\log_x 3} + \frac{4}{\log_x 3} + \frac{6}{\log_x 3} + \ldots + \frac{16}{\log_x 3} = 36,$$

$$\frac{1}{\log_x 3}(2 + 4 + 6 + \ldots + 16) = 36.$$

Skliaustuose parašytos sumos dėmenys sudaro aritmetinę progresiją, kurios suma lygi 72. Todėl gauname:

$$\frac{1}{\log_x 3} \cdot 72 = 36,$$

$$\frac{1}{\log_x 3} = \frac{1}{2},$$

$$\log_x 3 = 2.$$

Iš čia

$$x = \sqrt{3}.$$

Ats.: $\sqrt{3}$.

2 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$$

Sprendimas. Kad lygties kairioji pusė būtų lygi 0, būtina, kad pirmas dėmuo būtų neigiamas; todėl $\log_{\sqrt{3}} x < 0$. Vadinasi, $x \in (0; 1)$. Tada $\log_x 9 < 0$ ir todėl $\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9 > 0$. Toliau:

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} = -4,$$

$$\log^2_{\sqrt{3}} x \cdot (2 - 2\log_x 3) = 16,$$

$$\log^2_{\sqrt{3}} x \cdot \left(2 - \frac{4}{\log_{\sqrt{3}} x}\right) = 16,$$

$$2\log^2_{\sqrt{3}} x - 4\log_{\sqrt{3}} x - 16 = 0.$$

Šią lygtį sprendžiame keisdami kintamąjį. Tegu $z = \log_{\sqrt{3}} x$. Gauname:

$$2z^2 - 4z - 16 = 0,$$

$$z^2 - 2z - 8 = 0,$$

$$z \in \{-2; 4\}.$$

Tolesnei analizei tinka tik $z = -2$, nes $\log_{\sqrt{3}} x < 0$. Taigi $\log_{\sqrt{3}} x = -2$ ir $x = \frac{1}{3}$.

Ats.: $\frac{1}{3}$.

3 pavyzdys. Nustatykime, su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$\log_a \sqrt{4+x} + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^4}(16-x^2)^2 = 2$$

turi sprendinių, ir raskime šiuos sprendinius.

Sprendimas. Aišku, kad lygties apibrėžimo sritis yra intervalas $(-4; 4)$; taip pat turi galioti šios sąlygos: $a > 0$, $a \neq 1$.

Suvienodinę logaritmų pagrindus, gauname:

$$\log_{a^2}(4+x) + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^2}(16-x^2) = 2,$$

$$\log_{a^2}\frac{(4+x)(4-x)^3}{16-x^2}=2,$$

$$\log_{a^2}(4-x)^2=2,$$

$$2\log_{a^2}(4-x)=2,$$

$$\log_{a^2}(4-x)=1,$$

$$4-x=a^2,$$

$$x=4-a^2.$$

Galimoms parametro a reikšmėms rasti sprendžiame dvigubą nelygybę

$$-4<4-a^2<4.$$

Prie visų šios nelygybės narių pridėję (–4), gauname dvigubą nelygybę $-8<-a^2<0$, o iš jos $0<a^2<8$.

Kadangi $a>0$, $a\neq 1$, tai

$$0<a<1 \text{ arba } 1<a<2\sqrt{2}.$$

Ats.: $x=4-a^2$, $a\in(0;1)\cup(1;2\sqrt{2})$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2)<2.$$

Sprendimas. Šią nelygybę pertvarkome taip:

$$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^x\cdot 2-2)<2,$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2(2^x-1))<2,$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot(\log_2 2+\log_2(2^x-1))<2,$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot(1+\log_2(2^x-1))<2,$$

$$\log_2(2^x-1)+\log_2^2(2^x-1)-2<0.$$

Keitiniu $t=\log_2(2^x-1)$ gauname kvadratinę nelygybę $t^2+t-2<0$. Jos sprendiniai sudaro intervalą $(-2;1)$. Taigi,

$$-2<\log_2(2^x-1)<1,$$

$$\log_2 2^{-2}<\log_2(2^x-1)<\log_2 2,$$

$$\frac{1}{4} < 2^x - 1 < 2,$$

$$\frac{5}{4} < 2^x < 3,$$

$$\log_2 \frac{5}{4} < \log_2 2^x < \log_2 3,$$

$$\log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3.$$

Ats.: $x \in \left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$.

5 pavyzdys. Išspręskime rodiklinę nelygybę

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x < 4.$$

Sprendimas. Pažymėkime $u = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$. Tada

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \left(\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x} = \frac{1}{u}.$$

Gauname nelygybę $u + \frac{1}{u} < 4$. Kadangi $u > 0$, tai ji yra ekvivalenti nelygybei $u^2 - 4u + 1 < 0$. Šios nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $\left(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$.

Toliau sprendžiame dvigubą nelygybę

$$2-\sqrt{3} < \left(2+\sqrt{3}\right)^x < 2+\sqrt{3}.$$

Kadangi $2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, gauname $x \in (-1; 1)$.

Ats.: $x \in (-1; 1)$.

6 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Sprendimas. Ši logaritminė nelygybė yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases}$$

arba nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x. \end{cases}$$

Pirmosios sistemos sprendinių aibė yra intervalas $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, o antrosios – aibė $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; 6)$.

Ats.: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; 6)$.

7 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x};$$

čia $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $x \neq 1$.

Sprendimas. Pertvarkykime įrodomosios lygybės dešiniąją pusę:

$$\frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x} = (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot \log_x (abc) =$$

$$= (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot (\log_x a + \log_x b + \log_x c) =$$

$$= (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot \left(\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}\right) =$$

$$= \log_b x \cdot \log_c x + \log_a x \cdot \log_c x + \log_a x \cdot \log_c x.$$

Gavome įrodomosios lygybės kairėje pusėje esantį reiškinį.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 2\sqrt{2}.$$

2. Išspręskite logaritminę lygtį

$$\lg\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=\lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\lg 2.$$

3. Išspręskite lygtį

$$2^x+2^y+2^z=2336,$$

kai x, y, z yra natūralieji skaičiai ir tenkina sąlygą $x<y<z$.

4. Nesinaudodami nei logaritmų lentelėmis, nei skaičiuokliais, įrodykite, kad

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

5. Išspręskite logaritminę nelygybę

$$\log_{x^2+3x}(x+1)<1.$$

6. Nustatykite, su kuriomis a reikšmėmis rodiklinė lygtis

$$25^x-(a-4)5^x-2a^2+10a-12=0$$

neturi sprendinių.

7. Raskite išreikštinę kintamojo y priklausomybę $y=f(x)$ nuo kintamojo x, kai

$$\log_y x+\log_x y=2,$$

ir nubraižykite jos grafiką.

8. Tarkime, kad a ir b yra stačiojo trikampio statiniai, o c – jo įžambinė. Įrodykite, kad

$$\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

9. Įrodykite, kad

$$\lg 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9.$$

10. Įrodykite, kad

$$\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ kartų}}=-n.$$

VII. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Stereometrija (iš graikų kalbos „stereos“ – erdvė, „metreo“ – matuoju) – tai erdvės geometrija. Stereometrija nagrinėja erdvinių figūrų savybes. Kas tai yra plokštuma, visi įsivaizduoja; planimetrijoje plokštuma nagrinėjama nepriklausomai nuo ją supančios erdvės. Tuo tarpu stereometrijoje plokštumos suprantamos kaip erdvės taškų aibės, be to, kiekvienoje plokštumoje galioja planimetrija – plokštumos geometrija. Taigi nagrinėdami erdvės geometriją ir spręsdami uždavinius, naudosime planimetrijos sąvokas, teiginius ir formules.

Geometrijoje kaip ir bet kurioje kitoje matematikos mokslo šakoje pradiniai faktai gaunami iš praktikos, jie yra vaizdūs ir akivaizdūs. Tie faktai yra vadinami aksiomomis, jos apibūdina vadinamąsias pirmines sąvokas, t. y. tas sąvokas, kurios nėra apibrėžiamos. Kitos sąvokos yra apibrėžiamos, naudojant pirmines sąvokas ir jau apibrėžtas sąvokas. Kiti geometrijos faktai vadinami teoremomis – įrodomi naudojant aksiomas bei žinomus faktus.

Stereometrijos aksiomos apibūdina tokias sąvokas: taškas, tiesė, plokštuma. Išvardysime jas:

1. Bet kuriems trims erdvės taškams egzistuoja plokštuma, kuriai tie taškai priklauso. Tuomet sakoma, kad ši plokštuma eina per duotuosius taškus.

2. Jei dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę. Tuomet sakoma, kad dviejų plokštumų sankirta yra tiesė.

3. Jei teisei priklauso du plokštumos taškai, tai visi tiesės taškai yra toje plokštumoje. Tuomet sakoma, kad tiesė yra plokštumoje.

Iš šių aksiomų lengvai įrodomos tokios stereometrijos teoremos:

1 teorema. Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai egzistuoja vienintelė plokštuma, kuriai priklauso tie trys taškai.

2 teorema. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

3 teorema. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

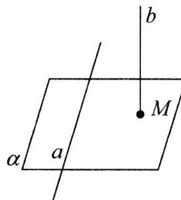
Dvi erdvės tiesės a ir b yra vadinamos *prasilenkiančiomis*, jei nėra tokios plokštumos, kuriai priklauso ir tiesė a, ir tiesė b. Jei tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje, tai jos arba turi vienintelį bendrą tašką (jos yra

susikertančios), arba neturi bendrų taškų (tiesės a ir b lygiagrečios, $a \parallel b$).

4 teorema. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Tiesė a ir plokštuma α gali turėti vieną bendrą tašką (tiesė kerta plokštumą), neturėti nė vieno bendro taško (tiesė lygiagreti su plokštuma), taip pat tiesė gali priklausyti plokštumai.

5 teorema (prasilenkiančių tiesių požymis). Jei tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b kerta plokštumą α taške M, nepriklausančiame tiesei a, tai tiesės a ir b yra prasilenkiančios (1 pav.).

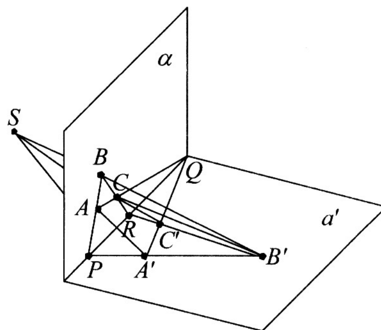


1 pav.

6 teorema. Kokia bebūtų tiesė a ir jai nepriklausantis taškas A, per tašką A eina vienintelė tiesė b, lygiagreti su tiese a.

1 pavyzdys. Du trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra skirtingose susiker tančiose plokštumose α ir α', be to, tiesės AA', BB' ir CC' kertasi viename taške S. Jei trikampių atitinkamos kraštinės nelygiagrečios, tai tiesių AB ir $A'B'$ sankirtos taškas P, tiesių AC ir $A'C'$ sankirtos taškas Q, bei tiesių BC ir $B'C'$ sankirtos taškas R yra vienoje tiesėje. Įrodysime tai (2 pav.).

Kadangi tiesės AA' ir BB' kertasi taške S, tai pagal 3 teoremą per šias tieses eina plokštuma β.

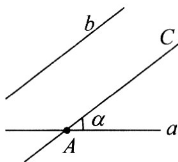


2 pav.

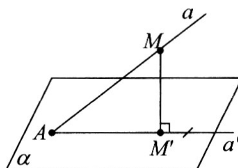
Kadangi tiesės AB ir $A'B'$ yra nelygiagrečios ir priklauso plokštumai β, tai jos susikerta taške P, kuris yra tiek plokštumoje α (nes taškai A ir B yra plokštumoje α), tiek plokštumoje α' (nes taškai A' ir B' yra plokštumoje α'). Taigi taškas P yra bendras plokštumų α ir α' taškas, tai pagal 2 aksiomą jis priklauso plokštumų α ir α' sankirtos tiesei. Analogiškai įrodome, kad ir taškai Q bei R irgi priklauso plokštumų α ir α' sankirtos tiesei.

Įrodytasis teiginys geometrijoje vadinamas *Dezargo teorema*, pagerbiant žymų prancūzų geometrą G. Dezargą (Gerard Desargues, 1591–1661).

Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a, tai pagal 6 teoremą per tašką A eina vienintelė tiesė c, lygiagreti su tiese b (3 pav.). Tuomet kampas α tarp tiesių a ir c yra vadinamas kampu tarp tiesių a ir b. Akivaizdu, jog taip apibrėžtas kampas tarp prasilenkiančių tiesių nepriklauso nuo taško A parinkimo.



3 pav.



4 pav.

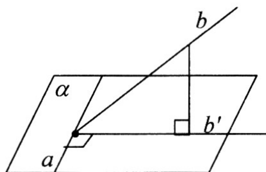
Tiesė a yra vadinama statmena plokštumai α, jei ji statmena bet kuriai tos plokštumos tiesei.

7 teorema. Tiesė yra statmena plokštumai tada ir tik tada, kai ji statmena dviems susikertančioms tos plokštumos tiesėms.

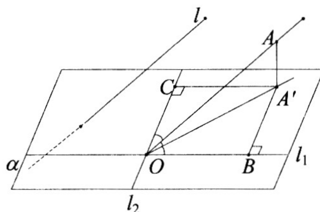
8 teorema. Per bet kurį tašką A eina vienintelė tiesė a, statmena duotajai plokštumai α.

9 teorema. Tiesė, nepriklausanti plokštumai, yra lygiagreti su ta plokštuma, jei ji lygiagreti bent su viena tos plokštumos tiese.

Sakykime, kad tiesė a kerta plokštumą α taške A (4 pav.). Iš bet kurio tiesės taško M nuleiskime statmenį į plokštumą α; šis statmuo kerta plokštumą α taške M', kuris vadinamas taško M ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Visų tiesės a taškų ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra tiesėje a', kuri vadinama tiesės a ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas kampu tarp tiesės a ir plokštumos α.



5 pav.



6 pav.

10 teorema (trijų statmenų teorema). Plokštumos tiesė *a* yra statmena tiesei *b* tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės *b* ortogonaliajai projekcijai toje plokštumoje (5 pav.).

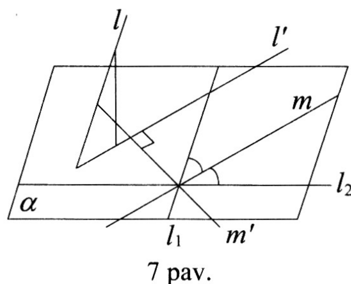
2 pavyzdys. Tiesė *l*, nestatmena plokštumai α, sudaro vienodus kampus su šios plokštumos susikertančiomis tiesėmis l_1 ir l_2. Įrodysime, kad šios tiesės ortogonalioji projekcija plokštumoje α irgi sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 (6 pav.).

Sakykime, kad plokštumoje α esančios tiesės l_1 ir l_2 kertasi taške *O*. Nubrėžkime tiesę *OA*, lygiagrečią su tiese *l*. Akivaizdu, kad tiesė *OA* sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2. Kadangi tiesių *l* ir *OA* ortogonaliosios projekcijos lygiagrečios, tai užtenka įsitikinti, kad tiesės *OA* ortogonalioji projekcija sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2. Iš taško *A* nuleidžiame statmenį AA' į plokštumą α ir nubrėžiame statmenis $A'B \perp l_1$, $A'C \perp l_2$. Pagal trijų statmenų teoremą $AB \perp l_1$, $AC \perp l_2$. Tuomet trikampiai *OAC* ir *OAB* yra lygūs (jie statūs, įžambinė *OA* bendra, o smailieji kampai *AOB* ir *AOC* lygūs pagal sąlygą). Iš čia $OB = OC$ ir tuomet lygūs statieji trikampiai $A'OB$ ir $A'OC$ (jų statiniai *OB* ir *OC* lygūs, o įžambinė OA' bendra). Todėl $\angle A'OB = \angle A'OC$, kas ir reikėjo įrodyti.

Pastebėkime, kad atvirkščias teiginys irgi teisingas (įsitikinkite tuo savarankiškai).

Iš įrodyto teiginio išeina, kad tiesė *l* sudaro vienodus kampus su dviems susikertančiomis tiesėmis tada ir tik tada, kai ji statmena vieno iš tų tiesių sudaromo kampo pusiaukampinei.

Jei tiesė *l* yra statmena plokštumai α, kuriai priklauso tiesės l_1 ir l_2, tai ji statmena bet kuriai plokštumos α tiesei, taigi ir kampo tarp tiesių pusiaukampinei. Jei tiesė *l* nėra statmena plokštumai α, tai pagal 2 pavyzdį jos projekcija l' sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 (7 pav.), t. y. tiesė *l* yra lygiagreti su vieno iš kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampine *m*. Kadangi kito kampo tarp tiesių l_1 ir l_2



7 pav.

pusiaukampinė m' yra statmena pusiaukampinei m, tai ji statmena ir tiesei l'. Tuomet pagal trijų statmenų teoremą tiesės l ir m' yra statmenos.

Atvirkščiai, jei tiesė l statmena kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinei m', tai ir jos ortogonalioji projekcija plokštumoje α (tiesė l') irgi statmena tiesei m', t. y. tiesė l' yra lygiagreti su kito kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampine m, taigi ji sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2. Pagal 2 pavyzdį tą savybę turi ir tiesė l.

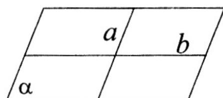
Dvi plokštumos α ir β yra vadinamos *lygiagrečiomis*, jei jos neturi bendrų taškų.

11 teorema. Jei plokštumos α susikertančios tiesės a ir b yra lygiagrečios su plokštumos β susikertančiomis tiesėmis, a' ir b', tai plokštumos α ir β lygiagrečios (8 pav.).

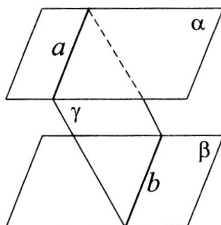
12 teorema. Jei plokštuma kerta vieną iš lygiagrečių plokštumų, tai ji kerta ir kitą, o susikirtimo tiesės yra lygiagrečios (9 pav.).

13 teorema. Per tašką A, nepriklausantį plokštumai α, eina vienintelė plokštuma, lygiagreti su plokštuma α.

14 teorema. Dvi plokštumos, statmenos tai pačiai tiesei, yra lygiagrečios.



8 pav.



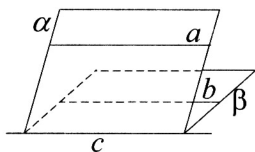
9 pav.

3 pavyzdys. Tiesės a ir b yra lygiagrečios. Per tiesę a eina plokštuma α, lygiagreti su tiese b, o per tiesę b eina plokštuma β, lygiagreti su tiese a. Jei plokštumos α ir β susikerta, tai jų sankirtos tiesė lygiagreti su tiesėmis a ir b. Įrodysime tai (10 pav.).

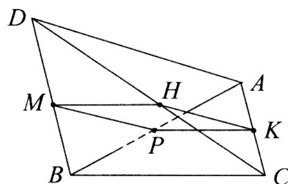
Kadangi tiesės a ir $c = \alpha \cap \beta$ yra vienoje plokštumoje α, tai pakanka įsitikinti, kad jos nesikerta. Jei jos kirstųsi, tai sankirtos taškas būtų ir

tiesėje a ir plokštumoje β, bet to būti negali, nes tiesė a lygiagreti su plokštuma β. Analogiškai įrodomas tiesių b ir c lygiagretumas.

4 pavyzdys. Trikampiai ABC ir DBC yra skirtingose plokštumose α ir β, taškai *M, H, K* yra atitinkamai atkarpų *BD*, *CD*, *AC* vidurio taškai. Plokštuma γ eina per taškus *M, H, K ir kerta atkarpą AB taške P.* Įrodysime, kad atkarpos *PH* ir *MK* kertasi ir susikirtimo taške dalijasi pusiau (11 pav.).



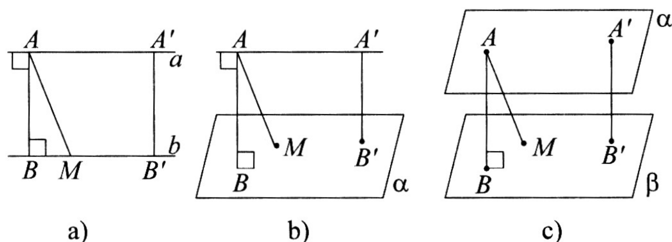
10 pav.



11 pav.

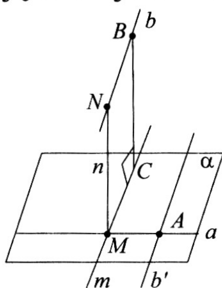
Kadangi atkarpa *MH* yra trikampio *DBC* vidurio linija, tai $MH \parallel BC$. Kadangi atkarpa *HK* yra trikampio *CAD* vidurio linija, tai $HK \parallel AD$. Pažymėkime δ plokštumą, einančią per taškus *A*, *B* ir *D*. Kadangi plokštumos γ ir δ eina per lygiagrečias tieses *HK* ir *AD*, tai jų sankirtos tiesė *PM* yra lygiagreti ir su tiese *HK*, ir su tiese *AD* (3 pavyzdys). Analogiškai plokštumos α ir γ eina per lygiagrečias tieses *BC* ir *MH*, todėl jų sankirtos tiesė *PK* yra lygiagreti ir su tiese *BC*, ir su tiese *MH*. Iš to kad $PM \parallel HK$ ir $PK \parallel MH$ išplaukia, kad keturkampis *MHKP* yra lygiagretainis, taigi jo įstrižainės *MK* ir *PH* susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.

Geometrijoje atstumu tarp bet kurių figūrų (t. y. aibių taškų) F_1 ir F_2 yra vadinamas trumpiausias atstumas tarp tų figūrų taškų $A \in F_1$ ir $B \in F_2$. Akivaizdu, kad atstumas tarp lygiagrečių tiesių, arba tarp tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos, arba tarp lygiagrečių plokštumų yra lygus jų bendrojo statmens ilgiui ir vienodas visuose taškuose (12 pav.). Šie atstumai yra trumpiausi iš visų atstumų, jungiančių tiesės a taškus su tiesės b taškais (tiesės a taškus su plokštumos α taškais, plokštumos α taškus su plokštumos β taškais.)

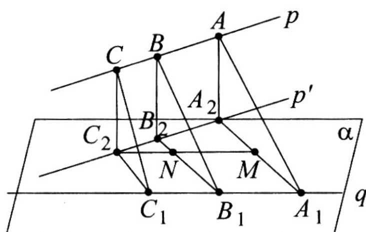


12 pav.

Sakykime, kad a ir b dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a, per jį eina tiesė b', lygiagreti su tiese b (13 pav.). Tuomet plokštuma α, einanti per tieses a ir b', yra lygiagreti su tiese b (9 teorema). Tiesėje b parinkime bet kokį tašką B ir nuleiskime statmenį BC į plokštumą α. Tiesė BC yra statmena tiesei a ir tiesei b. Per tašką C nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese b. Kadangi tiesės a ir b – prasilenkiančios, tai tiesės a ir m kertasi taške M. Iš taško M iškeliame statmenį plokštumai α. Kadangi taškai B, C, M yra vienoje plokštumoje, einančioje per lygiagrečias tieses b ir m, tai statmuo kerta tiesę b taške N. Tiesė MN yra statmena tiesėms a ir b, be to, abi jas kerta. Ši tiesė yra vadinama *prasilenkiančių tiesių bendruoju statmeniu.* Atkarpos MN ilgis yra trumpiausias atstumas tarp tiesių a ir b taškų, nes jis lygus atstumui nuo tiesės b iki plokštumos α. Taigi atstumas tarp prasilenkiančių tiesių yra lygus jų bendrojo statmens ilgiui.



13 pav.



14 pav.

5 pavyzdys. Tiesėje p pažymėti taškai A, B, C taip, kad taškas B yra atkarpoje AC ir $AB = 27$, $BC = 18$. Tiesė q yra prasilenkianti su tiese p ir nuo taškų A, B ir C nutolusi atitinkamai 17, 10 ir 8. Rasime atstumą tarp tiesių p ir q.

Sakykime, kad α yra plokštuma, einanti per tiesę q ir lygiagreti su tiese p (14 pav.), taškai A_1, B_1 ir C_1 yra taškų A, B ir C ortogonaliosios projekcijos tiesėje q, o taškai A_2, B_2, C_2 – taškų A, B, C ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α. Trikampiai AA_1A_2, BB_1B_2 ir CC_1C_2 yra statūs, jų statiniai AA_2, BB_2 ir CC_2 yra lygūs ieškomajam atstumui tarp tiesių p ir q. Kadangi $AA_1 = 17$, $BB_1 = 10$, $CC_1 = 8$, tai pažymėję $A_1A_2 = x$, $B_1B_2 = y$, $C_1C_2 = z$, gauname, kad

$$17^2 - x^2 = 10^2 - y^2 = 8^2 - z^2 \qquad (1)$$

Tiesė q statmena tiesėms AA_1, BB_1, CC_1, todėl pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir jų ortogonaliosioms projekcijoms A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, t. y. keturkampis $A_1C_1C_2A_2$ yra stačiakampė trapecija. Nubrėžę tiesę $C_2M \parallel q$, kuri kerta tiesę B_1B_2 taške N, iš trikampių C_2A_2M ir C_2B_2N panašumo gauname, kad $\dfrac{A_2M}{B_2N} = \dfrac{A_2C_2}{B_2C_2}$. Kadangi

$$A_2M = x - z, \ B_2N = y - z,$$
$$A_2C_2 = AC = 45, \ B_2C_2 = BC = 18,$$

tai

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}. \qquad (2)$$

Sprendžiame sistemą, sudarytą iš (1) ir (2) lygčių. Pažymėję $x - z = 5u$, $y - z = 2u$, iš (1) lygybių gauname

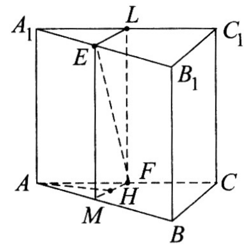
$$17^2 - 8^2 = (x-z)(x+z) \text{ ir } 10^2 - 8^2 = (y-z)(y+z);$$

todėl $x + z = \dfrac{45}{u}$ ir $y + z = \dfrac{18}{u}$. Iš čia gauname $x = \dfrac{1}{2}\left(5u + \dfrac{45}{u}\right)$, $y = u + \dfrac{9}{u}$. Pažymėję $u + \dfrac{9}{u} = t$, iš lygties $17^2 - x^2 = 10^2 - y^2$ gauname $17^2 - \left(\dfrac{5}{2}t\right)^2 = 10^2 - t^2$, t. y. $t^2 = 36$. Kadangi x ir y – neneigiami skaičiai, tai tinka tik teigiama t reikšmė $t = 6$. Taigi $x = \dfrac{5}{2} \cdot 6 = 15$, ir

ieškomasis atstumas $AA_2 = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.

6 pavyzdys. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra lygiakraščiai trikampiai, o jų kraštinės lygios $4\sqrt{3}$. Taškai E ir F yra atkarpų A_1B_1 ir AC vidurio taškai. Rasime atstumą tarp tiesių AA_1 ir EF.

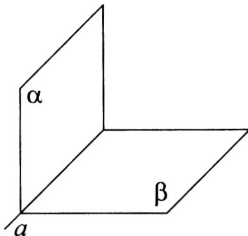
Sakykime, kad taškai L ir M yra atitinkamai briaunų A_1C_1 ir AB vidurio taškai (15 pav.). Tuomet plokštuma, einanti per taškus E, L, F ir M, eina per tiesę EF ir lygiagreti su tiese AA_1, nes $AA_1 \parallel EM$ (9 teorema). Taigi atstumas nuo tiesės AA_1 iki plokštumos, einančios per taškus E, L, F ir M yra lygus ieškomajam atstumui tarp tiesių AA_1 ir EF. Kadangi FM yra trikampio ABC vidurio linija, tai trikampis AMF yra lygiakraštis, jo kraštinė lygi $2\sqrt{3}$, o aukštinė AH lygi ieškomajam atstumui. Taigi



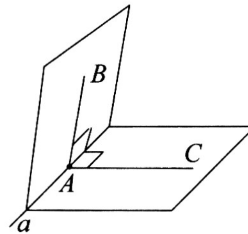
15 pav.

$$AH = \frac{AM\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3,$$

t. y. ieškomasis atstumas lygus 3.



16 pav.

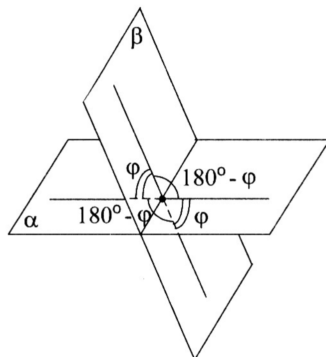


17 pav.

Dvisienį kampą sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kontūro tiesę (16 pav.). Tos pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo sienomis, o bendroji jų kontūro tiesė – dvisienio kampo briauna. Sakykime, kad dvisienio kampo briaunoje – tiesėje a – pažymime bet kokį tašką A ir kiekvienoje kampo sienoje išvedame spindulius AB ir AC, statmenus tiesei a (17 pav.).

Kampas CAB yra vadinamas nagrinėjamo dvisienio kampo *tiesiniu kampu*. Visi dvisienio kampo tiesiniai kampai yra lygūs (t. y. nepriklauso nuo taško $A \in a$ parinkimo). Dvisienio kampo didumu vadinamas jo *tiesinio kampo didumas*.

Dvi nelygiagrečios plokštumos α ir β sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vieno jų didumas φ, tai kitų didumai lygūs $180^\circ - \varphi$, φ ir $180^\circ - \varphi$ (18 pav.). Jei $\varphi = 90^\circ$, tai ir visi keturi kampai yra statūs, tuomet plokštumos α ir β yra statmenos.

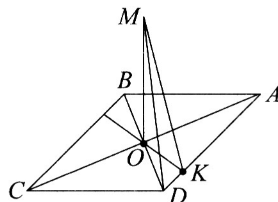


18 pav.

15 teorema. Jei plokštumoje α yra tiesė a, statmena plokštumai β, tai plokštumos α ir β yra statmenos.

7 pavyzdys. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus a, o kampas A lygus 60°. Taškas M nėra rombo plokštumoje ir vienodai nutolęs nuo rombo kraštinių. Plokštuma β, einanti per taškus A, M ir D. su rombo plokštuma sudaro 45° kampą. Rasime atstumą nuo taško M iki plokštumos α.

Kadangi taškas M vienodai nutolęs nuo rombo kraštinių, tai jo ortogonalioji projekcija rombo plokštumoje α yra rombo įstrižainių susikirtimo taškas O, irgi pasižymintis ta pačia savybe (19 pav.). Nubrėžkime tiesę OK, statmeną tiesei AD. Pagal trijų statmenų teoremą tiesės MK ir AD taip pat statmenos, todėl kampas OKM yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas. Iš trikampio OKM randame, kad $OM = OK$. Kadangi rombo plotas S lygus $2OK \cdot AD$ arba $AD^2 \sin\angle A$, tai iš čia $OK = \dfrac{AD^2 \sin\angle A}{2AD} = \dfrac{a^2 \sin 60^\circ}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Taigi ieškomasis atstumas lygus $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



19 pav.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės a ir b ir joms nepriklausantis taškas O. Ar visuomet egzistuoja tiesė, einanti per tašką O ir kertanti tieses a ir b?

2. Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra skirtingose susikertančiose plokštumose α ir α', tiesių AB ir $A'B'$, tiesių AC ir $A'C'$, tiesių BC ir $B'C'$ sankirtos taškai yra vienoje tiesėje. Jei tiesės AA', BB' ir CC' yra nelygiagrečios, tai jos kertasi viename taške. Įrodykite.

3. Trys plokštumos α tarpusavyje susikertančios tiesės sudaro vienodus kampus su tiese l. Įrodykite, kad tiesė l statmena plokštumai α.

Nurodymas. Pasinaudokite 2 pavyzdžiu ir jo išvada.

4. Trapecija $ABCD$, kurios pagrindas AD du kartus ilgesnis už pagrindą BC, ir trikampis ADP yra skirtingose plokštumose. Per tiesę BC ir atkarpos PD vidurio tašką K nubrėžta plokštuma, kertanti tiesę AP taške M. Įrodykite, kad atkarpos MC ir BK susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.

5. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos ilgis lygus 1, taškas K yra briaunos DD_1 vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių CK ir A_1D.

6. Lygiagrečios tiesės AB ir CD yra dvisienio kampo skirtingose sienose. Dvisienio kampo didumas lygus 60°; taškai A ir D nutolę nuo kampo briaunos atitinkamai 8 ir 6,5. Raskite atstumą tarp tiesių AB ir CD.

7. Kubo briaunos ilgis lygus a. Raskite atstumą tarp jo briaunos ir su ja prasilenkiančios kubo įstrižainės.

8. Vienoje dvisienio kampo sienoje yra tiesė l. Kampas tarp tiesės l ir kitos šio dvisienio kampo sienos yra didžiausias, kai tiesė l yra statmena dvisienio kampo briaunai. Įrodykite.

9. Atkarpos AB ir CD, kurių ilgiai atitinkamai lygūs $2\sqrt{5}$ ir $2\sqrt{7}$, yra prasilenkiančiose tiesėse, kampas tarp jų lygus $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Taškai E ir F yra atkarpų AB ir vidurio taškai, atkarpa EF lygi $\sqrt{13}$ ir statmena tiesėms AB ir CD. Raskite kampą ACB.

10. Taškas M yra vienodai nutolęs nuo visų stačiojo trikampio ABC viršūnių ir nėra trikampio plokštumoje. Trikampio statinių AC ir CB ilgiai lygūs a. Plokštuma, einanti per taškus M, B ir C, su trikampio ABC plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite atstumą nuo taško M iki trikampio plokštumos.



VIII. TRIGONOMETRIJOS UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Pateikiamos užduoties uždaviniams išspręsti turėtų pakakti trigonometrijos žinių, kurių galima rasti mokykliniuose vadovėliuose. Todėl teorinėje temos dalyje apsiribosime pavyzdžiais ir glaustais jų analizės komentarais.

1. Trigonometrinių reiškinių skaičiavimas ir tapatūs pertvarkiai.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime

$$\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha},$$

kai $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Sprendimas. Iš pradžių dvigubo argumento sinusą ir kosinusą išreikškime kampo α tangentu:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Taikydami šias formules, gauname:

$$\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 3(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{8\operatorname{tg}\alpha + 5(1-\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{4\cdot 3 - 3(1-9)}{8\cdot 3 + 5(1-9)} = \frac{12+24}{24-40} =$$

$$= -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4} = -2{,}25.$$

Ats.: –2,25.

2 pavyzdys. Apskaičiuokime sandaugą $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, kai $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta \neq \pi n$, $n \in Z$.

Sprendimas. Taikydami žinomas formules, gauname:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Uždavinio sąlygą $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$ pertvarkykime (turėdami mintyje, kad $\alpha+\beta\neq\pi n$, $n\in Z$) taip:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Tada

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ats.: $\frac{1}{3}$.

3 pavyzdys. Įrodykime tapatybę

$$4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin3\alpha.$$

Sprendimas.

Iš pradžių pertvarkykime sandaugą $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=$$

$$=\frac{\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)-\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{\cos2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{2\cos2\alpha+1}{4}.$$

Tada $4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\alpha\cdot\cos2\alpha+\sin\alpha=$

$$=\sin(\alpha-2\alpha)+\sin(\alpha+2\alpha)+\sin\alpha=-\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin\alpha=\sin3\alpha.$$

Matome, kad lygybė $4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin3\alpha$

galioja su visais realiaisiais skaičiais α; taigi, ji yra tapatybė.

2. Trigonometrinės lygtys.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\mathrm{tg}2x \cdot \sin 5x = 0$.

Sprendimas. Pirmiausia atkreipkime dėmesį į abiejų funkcijų, $y = \mathrm{tg}2x$ ir $y = \sin 5x$, apibrėžimo sritis. Žinome, kad sinusas yra apibrėžtas visoje realiųjų skaičių tiesėje, o tangentas nėra apibrėžtas tuose taškuose, kuriuose kosinusas yra lygus nuliui. Vadinasi, nagrinėdami šią lygtį, turėtume atsižvelgti į tai, kad $2x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, t.y. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

Spręsdami lygtį, remsimės akivaizdžia sandaugos savybe: dviejų dauginamųjų sandauga lygi nuliui tik tada, kai nors vienas iš jų yra lygus nuliui. Taigi,

$$\mathrm{tg}2x \cdot \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}2x = 0 \text{ arba } \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x = k\pi, k \in Z) \text{ arba } (5x = m\pi, m \in Z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right) \text{ arba } \left(x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z\right).$$

Aišku, kad taškų $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$, nėra nei aibėje $\left\{x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$, nei aibėje $\left\{x : x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z\right\}$; todėl jų nebus ir šių aibių sąjungoje

$$\left\{x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\} \cup \left\{x : x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z\right\}.$$

Abiems sprendinių aibėms priklauso tik taškai $x = n\pi, n \in Z$. Likusius pirmosios aibės taškus galima užrašyti formule $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in Z$.

Ats.: $\frac{m\pi}{5}, m \in Z$; $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in Z$.

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(\cos x + 1) \cdot \mathrm{ctg} x = \sin 2x .$$

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sričiai nepriklauso taškai, kuriuose $\sin x = 0$. Taigi, $x \neq k\pi$, $k \in Z$. Tada $\cos x + 1 > 0$.

Taikydami žinomas formules, pertvarkykime lygtį:

$$(\cos x + 1) \cdot \mathrm{ctg} x = \sin 2x, \sin x \neq 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x = 2\sin^2 x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0 .$$

Ši lygtis yra ekvivalenti lygčiai (kai $x \neq k\pi$, $k \in Z$) $\cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Jei $\cos x = 0$, tai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Lygties $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ sprendinių aibę sudaro taškai $\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$. Abi šios aibės bendrų taškų neturi.

Ats. : $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$.

3. Trigonometrinės nelygybės.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad nelygybė

$$a\sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{ab}$$

galioja, kai $x \neq k\pi$, $k \in Z$, $a > 0, b > 0$.

Sprendimas. Nagrinėkime kairiosios pusės ir dešiniosios pusės reiškinių skirtumą. Gausime:

$$\left(a\sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x}\right) - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\sin x\right)^2 - 2\sqrt{ab} + \left(\frac{\sqrt{b}}{\sin x}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{a}\sin x - \frac{\sqrt{b}}{\sin x}\right)^2 \geq 0, \text{ kai } x \neq k\pi,\ k \in Z .$$

Vadinasi:

$$a\sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{ab}\text{, kai } x \neq k\pi\text{, } k \in Z\text{, } a > 0, b > 0\text{.}$$

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > 0. \qquad (1)$$

Sprendimas. Taikydami formulę $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, gauname:

$$2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin 2x.$$

Vadinasi, pradinė nelygybė yra ekvivalenti šiai nelygybei:

$$1 + \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x > 0. \qquad (2)$$

Remdamiesi formule:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta),$$

gausime:

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Įrašę šią išraišką į (2), turėsime tokią nelygybę:

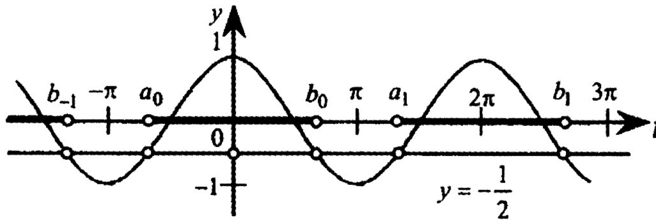
$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -1.$$

Pažymėkime $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ ir spręskime nelygybę

$$\cos t > -\frac{1}{2}.$$

Lygties $\cos t = -\frac{1}{2}$ sprendiniai yra $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$. Jų reikia nelygybės $\cos t > -\frac{1}{2}$ sprendinių aibei užrašyti. Kad būtų lengviau,

nubrėžkime funkcijos $y = \cos t$ grafiką – kosinusoidę ir tiesę $y = -\frac{1}{2}$ (žr. 1 pav.).



1 pav.

Matome, kad kosinusoidės dalies, kuri yra virš tiesės $y = -\frac{1}{2}$ taškų $(t; \cos t)$ ordinatės $\cos t$ yra didesnės už $-\frac{1}{2}$. Šių taškų abscisės t sudaro intervalus $(a_0; b_0)$, $(a_k; b_k)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; čia $a_0 = -\frac{2\pi}{3}$, $b_0 = \frac{2\pi}{3}$, $a_k = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $b_k = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Taigi, nelygybės $\cos t > -\frac{1}{2}$ sprendinių aibę galima užrašyti taip: $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Įrašę $t = 2x - \frac{\pi}{6}$, gausime (1) nelygybės sprendinių aibę:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in Z;$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in Z;$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) < x < \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), \; k \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, \; k \in Z.$$

Ats.: $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{5\pi}{12}+k\pi\right)$, $k \in Z$.

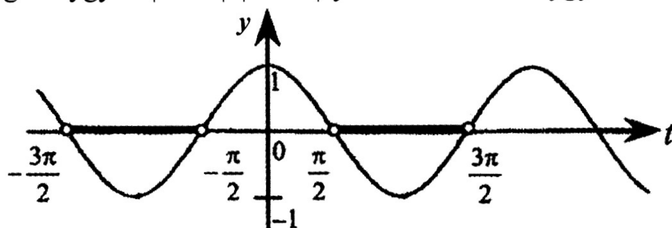
8 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$|\sin x|>|\cos x|.$$

Sprendimas. Aišku, kad

$$|\sin x|>|\cos x| \Leftrightarrow |\sin x|^2>|\cos x|^2 \Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x<0 \Leftrightarrow \cos 2x<0.$$

Taigi nelygybė $|\sin x|>|\cos x|$ yra ekvivalenti nelygybei $\cos 2x<0$.



2 pav.

Pažymėję $t=2x$, turėsime nelygybę $\cos t<0$.

Lygties $\cos t=0$ sprendinių aibę sudaro taškai

$$\frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m \in \text{Z}.$$

Nelygybės $\cos t<0$ sprendinių aibė yra intervalų

$$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right), \quad k \in \text{Z},$$

(žr. 2 pav.) sąjunga. Ieškomuosius kintamojo x reikšmių intervalus nesunku rasti iš dvigubos nelygybės

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi.$$

Gausime

$$\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi, \quad k \in \text{Z}.$$

Ats.: $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$, $k \in \text{Z}$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais α ir β galioja lygybė $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)+\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=1$.

2. Įrodykite tapatybę $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{5+3\cos 4x}{8}$.

3. Apskaičiuokite $\cos\dfrac{x}{2}$, kai $\cos x=\dfrac{1}{3}$, $2\pi<x<3\pi$.

4. Išspręskite lygtį $\cos 3x=\cos 5x$.

5. Išspręskite lygtį $\sin 4x+|\sin 5x|=2$.

6. Išspręskite lygtį $\sin 6x\cdot\cos 8x=1$.

7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais x galioja nelygybė $\sin^4 x+\cos^4 x\geq\dfrac{1}{2}$.

8. Išspręskite nelygybę $2\sin^2 x-3\cos x-1\geq 0$.

9. Išspręskite nelygybę $\cos 2x\geq\sin x$.

10. Raskite $\sin\alpha$, kai $\sin 2\alpha\geq\dfrac{3}{5}$ ir $\operatorname{tg}\alpha\leq\dfrac{1}{3}$.



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Į 0,7 litrų ir 0,9 litrų talpos stiklainius reikia supilstyti 21,5 litrų uogienės. Kiek mažiausiai stiklainių reikia?

2. Išspręskite nelygybę: $\log_x(2-x)<2$.

3. Išspręskite lygtį: $(\mathrm{tg}x+1)\sin x-\mathrm{tg}x=1$.

4. Taškas M vienodai nutolęs nuo visų stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90^\circ$) viršūnių ir nėra trikampio plokštumoje. Plokštuma, einanti per taškus M, B ir C, su trikampio ABC plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite taško M atstumą iki trikampio plokštumos, jeigu $AC=6$ cm.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėkime $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$. Tuomet:

$$y^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}\Rightarrow 3y^2=\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}-8\Rightarrow 3y^2+8=10y\Rightarrow$$

$$3y^2-10y+8=0\Rightarrow y_{1,2}=\frac{5\pm 1}{3}\Rightarrow y_1=2,\ y_2=\frac{4}{3}.$$

Toliau:

1) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2\Rightarrow x^2-6x-12=0\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{21}$;

2) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow x_3=6,\ x_4=-2$.

Ats.: $3\pm\sqrt{21},\ 6,\ -2$.

2. $$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}=$$

$$=-\frac{\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Ats.: $\frac{1}{8}$.

3. Tegu $t = xy$, $u = xz$, $v = yz$. Įrašę šiuos keitinius į lygčių sistemą, gausime:

$$\begin{cases} t + u \quad = 5, \\ t \quad + v = 10, \\ \quad u + v = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 - t, \\ v = 10 - t, \\ 15 - 2t = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 - t, \\ v = 10 - t, \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4, \\ v = 9, \\ t = 1. \end{cases}$$

Toliau spręskime taip:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ xz = 4, \\ yz = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ \frac{4}{x^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ x^2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ x = \pm\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}, \\ z = 6, \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

arba $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}, \\ z = -6, \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

Ats.: $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -6\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 6\right)$.

4. Pertvarkykime sumą:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 2004^3 = (1^3 + 2004^3) + (2^3 + 2003^3) +$

$+ (3^3 + 2002^3) + \ldots + (1002^3 + 1003^3) =$

$= (1 + 2004)(1^2 - 1 \cdot 2004 + 2004^2) +$

$+ (2 + 2003)(2^2 - 2 \cdot 2003 + 2003^2) +$

$+ (3 + 2002)(3^2 - 3 \cdot 2002 + 2002^2) +$

$+ \ldots + (1002 + 1003)(1002^2 - 1002 \cdot 1003 + 1003^2) =$

$= 2005(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 1002^2 + 1003^2 + \ldots +$

$+ 2002^2 + 2003^2 + 2004^2 - 1 \cdot 2004 - 2 \cdot 2003 - 3 \cdot 2002 - \ldots -$

$- 1002 \cdot 1003)$.

Dabar jau akivaizdu, kad suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$ dalijasi iš 2005.

5. Keleivių skaičių pažymėkime n $(1 \le n \le 100)$. Pagal sąlygą stovinčių keleivių skaičius buvo $\frac{n}{3}$; taigi $n = 3m$, $m \in \{1; 2; ...; 33\}$.

Išlipusių stotelėje keleivių skaičius $0{,}04n = 0{,}12m = \frac{3m}{25}$; taigi $m = 25k$, $k = 1$. Išvada tokia: autobuse važiavo 75 keleiviai, o trims išlipus stotelėje autobuse liko 72 keleiviai.

Ats.: 72.

6. Žąsiukų skaičių pažymėkime n. Tada n^2 yra gautoji pinigų suma. Pasidalijus po 10 litų, dar liko 10 litų ir keli litai. Pastarųjų litų skaičių pažymėkime m, $m \in \{1; 2; ...; 9\}$. Taigi gauname lygtį su dviem nežinomaisiais:

$$n^2 - 20 = 10 + m, \quad m \in \{1; 2; ...; 9\}.$$

Ji ekvivalenti lygčiai

$$n^2 = 30 + m, \quad m \in \{1; 2; ...; 9\},$$

ir turi vienintelį sprendinį: $m = 6$, $n = 6$.

Nepasidalyta 16 litų, todėl kiekvienas turi gauti dar po 8 litus. Pagal tolesnę uždavinio sąlygą gauname, kad jaunesnysis brolis turi grąžinti $10 - 8 = 2$ litus vyresniajam broliui.

Ats.: 2 Lt.

7. Tegu x yra dvynių amžius; $\overline{aa}$ – dvynių brolio amžius; $\overline{bc}$ – visų trijų brolių amžių suma. Pagal sąlygą $c = 2b$, todėl

$$\overline{bc} = 10b + c = 10b + 2b = 12b.$$

Aišku, kad b priklauso aibei $\{1; 2; 3; 4\}$.

Nagrinėkime lygybę

$$2x + \overline{aa} = 12b,$$

kurią galima užrašyti ir taip:

$$2x + 11a = 12b.$$

Iš čia

$$2x = 12b - 11a.$$

Nežinomųjų a, b ir x reikšmės turi būti sveikieji teigiami skaičiai. Be to, $b \in \{1; 2; 3; 4\}$, $a \in \{2; 4\}$. Sudarykime skaičių $2x$ lentelę poruodami galimas a ir b reikšmes:

a \ b	1	2	3	4
2	–	2	14	26
4	–	–	–	4

Mokyklinį amžių atitinka tik šios lentelės skaičius 26. Todėl $x = 13$, $a = 2$, $b = 4$. Vadinasi, dvynių amžius yra 13 metų, o jų brolio – 22 metai.

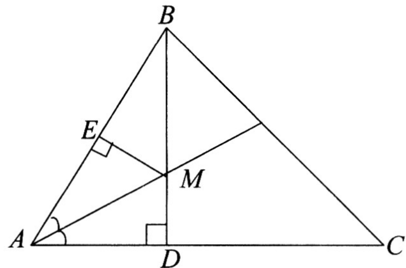
Ats.: 13, 13 ir 22 metai.

8. Pagal uždavinio sąlygą

$$\angle DAM = \angle MAE,$$
$$AE = EB,$$
$$ME \perp AB,$$
$$BD \perp AC.$$

Aišku, kad

$$\Delta DAM = \Delta MAE = \Delta MEB.$$



1 pav.

Taigi

$$\angle DAM = \angle MAE = \angle EBM = 30^\circ.$$

Todėl $\angle A = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

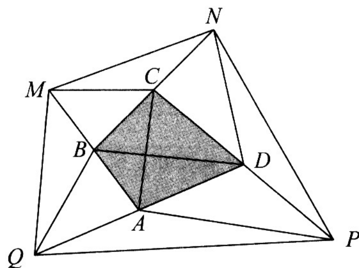
Ats.: 60°.

9. Keturkampį $ABCD$ padalykime įstrižaine AC į dvi dalis. Trikampio ABC plotą pažymėkime S_1, o ΔACD plotą pažymėkime S_2. Pagal sąlygą $S_1 + S_2 = S$. Nubrėžkime atkarpas AP ir CM. Palyginę susidariusių trikampių plotus gausime:

$$S_{\Delta BMC} = S_{\Delta CMN} = S_{\Delta ABC} = S_1,$$
$$S_{\Delta APQ} = S_{\Delta ADP} = S_{\Delta ACD} = S_2.$$

Vadinasi,

$$S_{\Delta BMN} + S_{\Delta DPQ} =$$
$$= 2S_1 + 2S_2 = 2S.$$



2 pav.

Analogiškai (nubrėžę įstrižainę BD ir atkarpas BQ bei DN) gauname, kad

$$S_{\Delta AQM} = 2S_{\Delta ABD},$$
$$S_{\Delta CNP} = 2S_{\Delta BCD}.$$

Todėl

$$S_{\Delta AQM} + S_{\Delta CNP} = 2(S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}) = 2S.$$

Taigi

$$S_{MNPQ} = (S_{\Delta BMN} + S_{\Delta DPQ}) + (S_{\Delta AQM} + S_{\Delta CNP}) + S_{ABCD} =$$
$$= 2S + 2S + S = 5S.$$

Ats.: 5S.

10. Kadangi visos trys piramidės šoninės briaunos yra pasvirusios į pagrindo plokštumą vienodu kampu, tai piramidės aukštinės pagrindas yra apibrėžto apie piramidės pagrindo trikampį apskritimo centras. Pagrindo trikampis yra statusis, todėl apibrėžto apie jį apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas, o šio apskritimo spindulys R yra lygus 5,5. Taigi piramidės aukštinės ilgis H apskaičiuojamas taip:

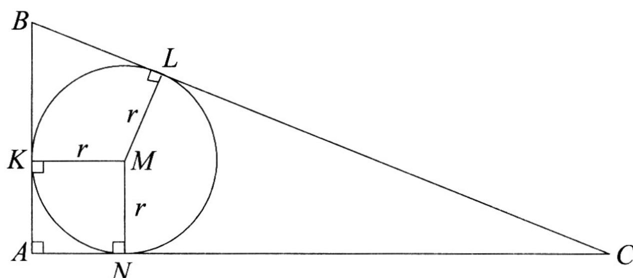
$$H = R \text{ tg } 60^\circ = 5{,}5 \cdot \sqrt{3}.$$

Apskaičiuokime pagrindo (žr. pav.) plotą. Pagal sąlygą trikampis ABC yra statusis, o L yra įbrėžtinio apskritimo ir įžambinės lietimosi taškas. Todėl trikampio ABC plotą galima apskaičiuoti pagal formulę $S_{\Delta ABC} = BL \cdot LC$ (įrodymą žr. sprendimo gale). Gauname $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 8 = 24$. Šį plotą galima rasti ir „standartiškai“.

Įbrėžtojo apskritimo spindulį pažymėkime r. Tada $BK = BL = 3$, $CN = CL = 8$, $AB = 3 + r$, $AC = 8 + r$. Pagal Pitagoro teoremą $(3+r)^2 + (8+r)^2 = 11^2$. Iš čia gauname lygtį

$r^2 + 11r - 24 = 0$, kuri turi vieną teigiamą sprendinį $r = \dfrac{\sqrt{217} - 11}{2}$.

Taigi



3 pav.

$$AB = \frac{\sqrt{217} - 11}{2} + 3 = \frac{\sqrt{217} - 5}{2},$$

$$AC = \frac{\sqrt{217} - 11}{2} + 8 = \frac{\sqrt{217} + 5}{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{217} - 5}{2} \cdot \frac{\sqrt{217} + 5}{2} = \frac{217 - 25}{8} = 24.$$

Belieka apskaičiuoti piramidės tūrį:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6{,}5\sqrt{3} = 44\sqrt{3}.$$

Formulės $S_{\Delta ABC} = BL \cdot LC$ *įrodymas.* Sakykime, kad $CL = x$, $LB = y$. Tada $BC = x + y$, $AC = x + r$, $AB = y + r$. Pagal Pitagoro teoremą $(x + y)^2 = (x + r)^2 + (y + r)^2 \Rightarrow r^2 + (x + y)r = xy.$ Kita vertus, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r = \frac{1}{2}(x + y + x + r + y + r) \cdot r =$ $= (x + y + r) \cdot r = r^2 + (x + y)r$. Taigi $S_{\Delta ABC} = x \cdot y$.

Ats.: $44\sqrt{3}$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, x – stačiakampio kraštinės, kurią reikia tverti mūrine siena, ilgis, o y – stačiakampio kraštinės, kurią reikia tverti medine tvora, ilgis. Tada stačiakampio plotas $xy = 9000$ (m^2), o tvoros kaina $K = 25x \cdot 2 + 10y \cdot 2 = 50x + 20y$. Kadangi $y = \frac{9000}{x}$, tai

$$K(x) = 50x + 20 \cdot \frac{9000}{x} = 50x + \frac{180\,000}{x} \geq 2\sqrt{50x \cdot \frac{180\,000}{x}} =$$
$$= 2 \cdot 3000 = 6000 \text{ (Lt).}$$

Mažiausia tvoros kaina, lygi 6000 Lt, yra tada, kai $50x = \frac{180\,000}{x}$, t. y. kai $x = 60$ (m). Tada $y = \frac{9000}{60} = 150$ (m).

Ats.: Žemės sklypo matmenys 60 m × 150 m.

2. Sakykime, $y = \frac{x+3+x+5}{2} = x + 4$. Tada lygtyje kintamąjį x pakeitę kintamuoju $y - 4$, gauname lygtį :

$$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16 \text{ arba}$$
$$(y-1)^2 \cdot (y-1)^2 + (y+1)^2 \cdot (y+1)^2 = 16.$$

Pakėlus kairioje lygties pusėje esančius reiškinius kvadratu, sudauginus ir suprastinus panašius narius, gausime bikvadratinę lygtį

$$y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$$

Jos sprendiniai yra: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. Tada $x_1 = y_1 - 4 = -1 - 4 = -5$, $x_2 = y_2 - 4 = 1 - 4 = -3$.

Ats.: –5; –3.

3. Sakykime, pirmojoje statinėje yra u kg druskos rūgšties, antrojoje statinėje – v kg druskos rūgšties ir į pirmąją statinę buvo įpilta x kg vandens, o į antrąją statinę – y kg vandens. Tada pirmojoje statinėje

druskos rūgšties tirpalo koncentracija iš pradžių buvo $\frac{u}{900}$, o įpylus vandens – $\frac{u}{900+x}$. Antrojoje statinėje druskos rūgšties koncentracija iš pradžių buvo $\frac{v}{1600}$, o įpylus vandens – $\frac{v}{1600+y}$.

Pagal sąlygą:

$$\frac{\frac{u}{900}}{\frac{u}{900+x}} = r \quad \text{ir} \quad \frac{\frac{v}{1600}}{\frac{v}{1600+y}} = s,$$

t. y.

$$900 + x = 900r \quad \text{ir} \quad 1600 + y = 1600s.$$

Iš čia

$$x + y = 900r + 1600s - 2500.$$

Kadangi

$$s = \frac{18-r}{2r} = \frac{9}{r} - \frac{1}{2},$$

tai

$$x + y = 900r + 1600\left(\frac{9}{r} - \frac{1}{2}\right) - 2500 = \left(900r + \frac{1600 \cdot 9}{r}\right) - 3300 \geq$$

$$\geq 2\sqrt{900r \cdot \frac{1600 \cdot 9}{r}} - 3300 =$$

$$= 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 3 - 3300 = 7200 - 3300 = 3900 \text{ (kg)}.$$

Taigi mažiausiai vandens (3900 kg) galėjo būti įpilta į abi statines tik tada, kai $900r = \frac{1600 \cdot 9}{r}$, t. y. kai $r = 4$, o $s = \frac{7}{4}$.

Ats.: $r = 4$, $s = \frac{7}{4}$, 3900 kg.

4. Vieno produkcijos vieneto vidutiniai kaštai apskaičiuojami pagal formulę

$$\frac{K(x)}{x} = 2x + 200 + \frac{1\,280\,000}{x},$$

čia x – produkcijos kiekis. Kadangi

$$2x + \frac{1\,280\,000}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1\,280\,000}{x}} = 2 \cdot 1600 = 3200,$$

tai $\frac{K(x)}{x} \geq 3200 + 200 = 3400$ (Lt). Mažiausi vieno produkcijos vieneto kaštai, lygūs 3400 Lt, yra tada, kai $2x = \frac{1\,280\,000}{x}$, t. y. kai $x = 800$.

Ats.: 800.

5. Funkcijos išraišką pertvarkome taip:

$$f(x) = x^{1500} + x^{400} + x^{105} + \frac{2005}{x} =$$

$$= \left(x^{1500} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{1500\,k} \right) + \left(x^{400} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{400\,k} \right) +$$

$$+ \left(x^{105} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{105\,k} \right).$$

Remdamiesi sąryšiu tarp aritmetinio ir geometrinio vidurkių, gauname:

$$f(x) \geq 1501 \sqrt[1501]{x^{1500} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{1500\,k}} + 401 \sqrt[401]{x^{400} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{400\,k}} +$$

$$+ 106 \sqrt[106]{x^{105} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{105\,k}} = 1501 + 401 + 106 = 2008.$$

Taigi funkcijos reikšmės ne mažesnės už 2008. Mažiausią reikšmę, lygią 2008, funkcija įgyja, kai $x^{1500} = x^{400} = x^{105} = \frac{1}{x}$, t. y. kai $x = 1$.

Ats.: 2008.

6. a) Akivaizdu, kad $(a-b)^2 \geq 0$, t. y. $a^2 + b^2 \geq 2ab$; čia lygybė galima tik tada, kai $a = b$. Prie šios nelygybės abiejų pusių pridėję po reiškinį $a^2 + b^2$, gauname: $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$, t. y. $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ arba $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

b) Reiškinį $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$ pertvarkome taip:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = a + b + c.$$

Taigi $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b = c$.

7. Kadangi dėžutės pagrindas taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinės ilgis $(90 - 2x)$ cm, o dėžutės aukštis $h = x \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}x$, tai dėžutės tūris

$$V(x) = 6 \cdot \frac{(90-2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}x = \frac{9}{2}(90-2x)^2 \cdot x =$$

$$= \frac{9}{2}(90-2x)(90-2x)(4x) \cdot \frac{1}{4} =$$

$$=\frac{9}{8}(90-2x)(90-2x)(4x)\le\frac{9}{8}\left(\frac{90-2x+90-2x+4x}{3}\right)^3=$$

$$=\frac{9}{8}\cdot 60^3=243000\ (\text{cm}^3).$$

Taigi dėžutės tūris ne didesnis už 243 dm^3. Didžiausia galima jo reikšmė lygi 243 dm^3, kai $90-2x=4x$, t. y. kai $x=15$ cm.

Ats.: 15 cm.

8. Sakykime, taisyklingosios keturkampės piramidės S_{ABCD} (žr. 1 pav.) šoninė briauna $SC=b$, o aukštinė $SO=x$. Tada iš stačiojo trikampio SOC:

$$OC=\sqrt{b^2-x^2}\quad\text{ir}\quad AC=2\sqrt{b^2-x^2}\,.$$

Piramidės pagrindo plotas $S_{ABCD}=\dfrac{AC^2}{2}=2(b^2-x^2)$,

o piramidės tūris $V(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 2(b^2-x^2)\cdot x=\dfrac{2}{3}(b^2-x^2)\cdot x$.

Kadangi dauginamųjų b^2-x^2 ir x suma nėra pastovi, tai ieškosime tokios x reikšmės, su kuria $V^2(x)$ įgyja didžiausią reikšmę (o kartu ir $V(x)$). Turime:

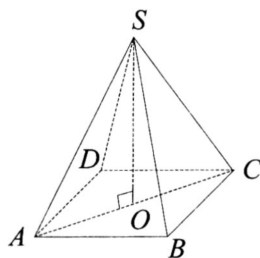
$$V^2(x)=\frac{4}{9}(b^2-x^2)^2\cdot x^2=$$

$$=\frac{4}{9}(b^2-x^2)(b^2-x^2)\cdot(2x^2)\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{2}{9}(b^2-x^2)(b^2-x^2)\cdot(2x^2)\le$$

$$\le\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{b^2-x^2+b^2-x^2+2x^2}{3}\right)^3=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{8b^6}{27}=\frac{16b^6}{243}.$$



1 pav.

Taigi $V^2(x) \le \dfrac{16b^6}{243}$ arba $V(x) \le \dfrac{4b^3}{9\sqrt{3}}$.

Piramidės tūris yra didžiausias ir lygus $\dfrac{4\sqrt{3}\,b^3}{27}$, kai

$b^2 - x^2 = 2x^2$, t. y. kai $x = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Ats.: $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

9. Sakykime dėžės ilgis yra x, plotis y, o aukštis z. Tada dėžės viso paviršiaus plotas $T = 2xy + 2xz + 2yz$, o tūris $V = xyz$. Kadangi

$$T = 2xy + 2xz + 2yz \ge 3\sqrt[3]{(2xy)(2xz)(2yz)} = 6\sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$

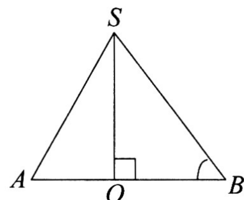
tai $T \ge 6\sqrt[3]{V^2}$. Dėžės visas paviršiaus plotas yra mažiausias ir lygus $6\sqrt[3]{V^2}$, kai $2xy = 2xz = 2yz$, t. y. kai $x = y = z = \sqrt[3]{V}$.

Ats.: $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{V}$.

10. Paveiksle pavaizduotas kūgio ašinis pjūvis ASB; čia $SB = l$ – kūgio sudaromoji ir $\angle SBO = \alpha$. Kūgio tūris $V = \dfrac{\pi}{3} OB^2 \cdot SO$. Kadangi $SO = l \sin\alpha$, $OB = l\cos\alpha$, tai

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} l^2 \cos^2\alpha \cdot l \sin\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{3} l^3 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha.$$



2 pav.

Ieškosime, esant kuriai α reikšmei

$$V^2(\alpha) = \frac{\pi^2}{9} l^6 \sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha$$

įgyja didžiausią reikšmę. Kai α turės šią reikšmę, tada ir $V(\alpha)$ įgis didžiausią reikšmę. Turime:

$$V^2(\alpha)=\frac{\pi^2}{9}l^6\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha=\frac{\pi^2}{9}l^6\cdot\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\le$$

$$\le\frac{\pi^2}{18}l^6\left(\frac{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{3}\right)^3=\frac{\pi^2}{18}l^6\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4\pi^2}{243}l^6$$

ir $V(\alpha)\le\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3=\frac{2\sqrt{3}\,\pi l^3}{27}$. Kūgio tūris yra didžiausias ir lygus $\frac{2\sqrt{3}\,\pi\, l^3}{27}$, kai $2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, t. y. kai $\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}$. Kadangi $\alpha\in(0;90^\circ)$, tai $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha\approx35^\circ$.

Ats.: $\frac{\pi}{3}l^3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$; $\alpha\approx35^\circ$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Čia „triušiai“ – mokiniai, „narveliai“ – padarytų klaidų skaičius. Į „narvelį“ 0 „patalpinkime“ visus, kurie nepadarė nė vienos klaidos, į „narvelį“ 1 – tuos, kurie padarė vieną klaidą, o į „narvelį“ 2 – kurie padarė dvi klaidas ir taip iki 13 „narvelio“, į kurį pateko vienas Mikas. Dabar taikykime Dirichlė principą. Įrodykime prieštaros būdu. Sakykime, jokie trys mokiniai nepadarė vienodai klaidų, t. y. į kiekvieną „narvelį“ 0, 1, 2, ... , 12 pateko mažiau kaip 3 mokiniai. Tuomet kiekviename jų yra du arba mažiau mokinių, o visuose 13 narvelių ne daugiau kaip $2\cdot13=26$ mokiniai. Pridėję Miką Petraitį, negausime 30 mokinių. Gavome prieštaravimą. Tai rodo, kad uždavinio teiginys teisingas, t. y. bent trys mokiniai padarė vienodai klaidų.

2. *Atsakymas.* Jeigu metai ne keliamieji, tai 366, jeigu keliamieji – 367.

3. Jeigu kiekvienoje klasėje mokytųsi mažiau negu 26 mokiniai, tai 43-jose klasėse mokytųsi ne daugiau kaip 1075 mokiniai $(25 \cdot 43 = 1075)$. Kadangi mokykloje mokosi 1076 mokiniai, tai yra bent viena klasė, kurioje mokosi daugiau kaip 25 mokiniai.

4. Išnagrinėkime eilutę 1, 11, 111, 1 111, ... , $\underbrace{111...1}_{2006}$. Pagal Dirichlė principą egzistuoja du šios eilutės skaičiai, kuriuos dalijant iš 2005, gaunamos vienodos liekanos. Iš didesniojo skaičiaus atėmę mažesnįjį, gausime skaičių užrašytą vienetais ir nuliais, kuris bus skaičiaus 2005 kartotinis.

5. Išnagrinėkime du atvejus.

Tarkime, kad yra 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunamos 9 skirtingos liekanos. Tuomet liekanų suma lygi 36 $(0+1+2+3+4+5+6+7+8=36)$ ir skaičių suma dalijasi iš 9 be liekanos.

Kitas atvejis. Tarkime, kad nėra 9 skaičių, kuriuos dalijant iš 9 gautume 9 skirtingas liekanas. Tuomet didžiausias skirtingų liekanų skaičius gali būti 8. Kadangi $65 = 8 \times 8 + 1$, tai pagal Dirichlė principą yra bent 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunama vienoda liekana. Tų skaičių suma bus dali iš 9.

6. Tegul $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – duotieji skaičiai.

Sudarykime n sumų:

$$a_1,$$

$$a_1 + a_2,$$

$$a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Jei bent viena iš šių sumų dalijasi iš n, tai teiginys teisingas. Sakykime, kad nei viena iš jų nesidalija iš n. Tada dalijamos iš n jos gali duoti tik liekanas 1, 2, ..., n–1. Sumų yra n, o skirtingų nenulinių liekanų, gaunamų dalijant sveikuosius skaičius iš n, yra n–1.

Čia „narveliai“ – liekanos, o „triušiai“ – sumos. Kadangi „narvelių“ yra n–1, o sumų n, tai pagal Dirichlė principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip viena suma, t. y. bent dvi sumos. Tų sumų skirtumas dalijasi iš n ir jis yra lygus kuriam nors duotajam skaičiui arba kelių skaičių sumai.

7. Sudarykime 30 „narvelių“: 0 – komandoms, nežaidusioms nei vienų rungtynių, 1 – komandoms, sužaidusioms vienerias rungtynes, 2 – dvejas, ... , 29 – dvidešimt devynerias rungtynes (didžiausias galimų rungtynių skaičius). „Narvelis 0“ arba „Narvelis 29“ turi būti tuščias, nes negali būti taip, kad viena komanda nesužaidė nei vienų rungtynių, o kita tuo pačiu metu sužaidė 29 rungtynes. Abiem atvejais 29-iems „narveliams“ tenka 30 komandų. Vadinasi, nors viename „narvelyje“ yra bent dvi komandos.

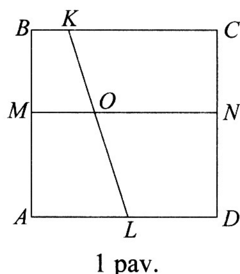
8. Padalinkime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius, kurių kiekvieno kraštinė lygi $\frac{1}{5}$.

Tuomet bus bent vienas kvadratėlis, kuriame bus bent trys taškai ($51 > 25 \cdot 2$), o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys mažesnis už $\frac{1}{7}$.

9. Išdėstykime atkarpas pagal jų ilgį: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_7$. Iš atkarpų $a_k \le a_{k+1} \le a_{k+2}$ galima sudaryti trikampį tik tada, kai $a_k + a_{k+1} \ge a_{k+2}$. Sakykime, kad uždavinio teiginys neteisingas. Tuomet $a_k + a_{k+1} < a_{k+2}$ $(k = 1,2,3,4,5)$. Vadinasi, atkarpos a_7 ilgis būtų mažiausias, kai $a_1 = a_2 = 10\,cm$ ir $a_k + a_{k+1} = a_{k+2}$ $(k = 1,2,3,4,5)$. Bet netgi šiuo atveju $a_7 = 130$ cm > 1 m. Gavome prieštaravimą sąlygai.

10. Nubrėžkime kvadrato *ABCD* vidurinę liniją *MN* ir nagrinėkime bet kurią iš devynių duotųjų tiesių, pavyzdžiui KL. Ji dalija kvadratą į dvi trapecijas (atskiru atveju stačiakampius), kurių plotų santykis 1:3. Kadangi trapecijos plotas lygus vidurinės linijos ir aukštinės

sandaugai, tai $MO:ON = 1:3$. Taigi bet kuri iš devynių duotųjų tiesių eina per tašką, kuris kvadrato vidurinę liniją dalija santykiu $1:3$. Taškų, kurie vidurinę liniją dalija santykiu $1:3$, yra du. Du, tokia savybe pasižymintys taškai, yra ir kitoje kvadrato vidurinėje linijoje. Kadangi yra devynios tiesės, tai per bent vieną iš tų keturių taškų eis ne mažiau kaip trys tiesės.



1 pav.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Užrašykime lygtį pavidalu $(x-1)(y-1)=1$. Dviejų sveikųjų skaičių sandauga lygi 1 tik tuomet, kai ši skaičių pora yra $(-1;-1)$ arba $(1;1)$. Taigi $x=0,\ y=0$ arba $x=2,\ y=2$.

Ats.: $x=0,\ y=0$; $x=2,\ y=2$.

2. Išreikškime iš lygties kintamąjį y:

$$y=\frac{5x}{x-5}=\frac{5x-25+25}{x-5}=5+\frac{25}{x-5}.$$

Kintamasis y bus sveikasis skaičius tik tuomet, kai $|x-5|$ yra skaičiaus 25 daliklis, t. y. arba $|x-5|=1$, arba $|x-5|=5$, arba $|x-5|=25$. Iš pirmosios lygties $x=4$ arba $x=6$, iš antrosios $x=0$ (šią reikšmę turime atmesti) arba $x=10$, iš trečiosios $x=30$ arba $x=-20$. Apskaičiuojame atitinkamas kintamojo y reikšmes: $y=-20$, $y=30$, $y=10$, $y=6$, $y=4$.

Ats.: $(4;-20)$, $(6;30)$, $(10;10)$, $(30;6)$, $(-20;4)$.

3. Kadangi $-38743=213\cdot(-182)+23$, tai $q=-182$, $r=23$.

Ats.: $q=-182$, $r=23$.

4. Taikome Euklido algoritmą: $546=231\cdot 2+84$, $231=84\cdot 2+63$, $84=63\cdot 1+21$, $63=21\cdot 3$. Paskutinioji nelygi nuliui liekana, t. y. duotųjų skaičių bendras didžiausias daliklis, yra 21.

Ats.: 21.

5. $$-7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}=-7+\cfrac{1}{3+\cfrac{9}{10}}=-7+\cfrac{1}{\cfrac{39}{10}}=-7+\frac{10}{39}=\frac{-273+10}{39}=$$

$$=-\frac{263}{39}.$$

Ats.: $-\frac{263}{39}$.

6. $$\frac{129}{25}=5+\frac{4}{25}=5+\cfrac{1}{\cfrac{25}{4}}=5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}=[5,6,4].$$

Ats.: $[5,6,4]$.

7. Kadangi $(15,12)=3$, o 25 nesidalija iš 3, tai pagal 1 teoremą duotoji diofantinė lygtis sprendinių neturi.

Ats.: neturi.

8. Iš lygties $41x+17y=2$ išreiškiame y:

$$y=\frac{-41x+2}{17}=-2x+\frac{-7x+2}{17}.$$

Pažymėkime $t_1=\frac{-7x+2}{17}$ ir tuomet

$$x=\frac{-17t_1+2}{7}=-2t_1+\frac{-3t_1+2}{7}.$$

Pažymėkime $t_2=\frac{-3t_1+2}{7}$. Iš čia

$$t_1=\frac{-7t_2+2}{3}=-2t_1+\frac{-t_2+2}{3}.$$

Toliau $t_3=\frac{-t_2+2}{3}\Rightarrow t_2=-3t_3+2$ - sveikasis skaičius, kai $t_3\in Z$. Tuomet

$$t_1 = \frac{-7t_2 + 2}{3} = \frac{-7(-3t_3 + 2) + 2}{3} = 7t_3 - 4 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-17t_1 + 2}{7} = \frac{-17(7t_3 - 4) + 2}{7} = -17t_3 + 10, t_3 \in Z \Rightarrow$$

$$y = \frac{-41x + 2}{17} = \frac{-41(-17t_3 + 10) + 2}{17} = 41t_3 - 24.$$

Taigi lygties bendrasis sprendinys (rašant $t_3 = t$) yra $x = -17t + 10,\ y = 41t - 24,\ t \in Z$.

Ats.: $x = -17t + 10,\ y = 41t - 24,\ t \in Z$.

9. Iš lygties $x = \frac{-84y + 39}{15} = -5y + \frac{-9y + 39}{15}$. Tegu $t_1 = \frac{-9y + 39}{15}$.

Tuomet

$$y = \frac{-15t_1 + 39}{9} = -t_1 + \frac{-6t_1 + 39}{9},$$

$$t_2 = \frac{-6t_1 + 39}{9} \Rightarrow t_1 = \frac{-9t_2 + 39}{6} = -t_2 + \frac{-3t_2 + 39}{6},\quad t_3 = \frac{-3t_2 + 39}{6}$$

$\Rightarrow t_2 = -2t_3 + 13$ – sveikasis skaičius, kai $t_3 \in Z$. Tada

$$t_1 = \frac{-9t_2 + 39}{6} = \frac{-9(-2t_3 + 13) + 39}{6} = 3t_3 - 13 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-15t_1 + 39}{9} = \frac{-15(3t_3 - 13) + 39}{9} = -5t_3 + 26 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-84y + 39}{15} = \frac{-84(-5t_3 + 26) + 39}{15} = 28t_3 - 143,\ t_3 = t \in Z.$$

Vadinasi, $x = 28t - 143,\ y = -5t + 26,\ t \in Z$.

Vietoje t įrašykime, pavyzdžiui, $t + 1$, – gausime ekvivalenčią bendrojo sprendinio išraišką: $x = 28t - 115,\ y = -5t + 21,\ t \in Z$.

Ats.: $x = 28t - 143,\ y = -5t + 26,\ t \in Z$; $x = 28t - 115,\ y = -5t + 21,\ t \in Z$.

10. Užrašykime duotąją lygtį taip: $11y + 10x = 15$. Ją išspręskime naudodamiesi grandininėmis trupmenomis. Trupmeną $\frac{11}{10}$

užrašykime grandinine trupmena: $\frac{11}{10}=1+\frac{1}{10}=[1,10]$. Atmetę paskutinę jos grandį, gausime „trupmeną" 1. Skirtumas yra $\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$. Padauginkime abi šios lygybės puses iš 10. Gausime lygybę $11\cdot1+10\cdot(-1)=1$ (kurią galėjome užrašyti ir iš karto). Tuomet ją padauginę iš 15, turėsime $11\cdot15+10\cdot(-15)=15$. Taigi duotosios lygties $11y+10x=15$ atskirasis sprendinys yra $y_0=15, x_0=-15$. Pagal 3 teoremą bendrasis šios lygties sprendinys toks: $y=15-10t$, $x=-15+11t$, $t\in Z$.

Dabar raskime t reikšmes, esant kurioms galioja nelygybė $-10\le-15+11t\le20$. Ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $5\le11t\le35$, kurios sveikieji sprendiniai yra $t=1,\ t=2,\ t=3$. Kai $t=1$, tai $x=-4, y=5$. Kai $t=2$, tai $x=7, y=-5$. Kai $t=3$, tai $x=18, y=-15$.

Ats.: $(-4;5),\ (7;-5), (18;-15)$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal Euklido algoritmą gauname:

$$P(x)=Q(x)\cdot(x-3)+(40x^2-16x+56);$$

$$Q(x)=(40x^2-16x+56)\ (x/8+3/8)+0.$$

Antroji liekana lygi nuliui, todėl didžiausias bendrasis daliklis yra pirmoji liekana $40x^2-16x+56 = 8(5x^2-2x+7)$.

Ats.: $D(P;Q)=5x^2-2x+7$.

2. Pagal Euklido algoritmą gauname:

$$P(x)=Q(x)(x-5) + (17x^2+34x+34);$$

$$Q(x)= (17x^2+34x+34)\ (x+4) + 0.$$

Antroji liekana lygi nuliui, todėl didžiausias bendrasis daliklis yra pirmoji liekana $17x^2+34x+34 = 17(x^2+2x+2)$.

Ats.: $D(P;Q)=x^2+2x+2$.

3. Pagal Bezu teoremą, daugianario $P(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$ dalybos iš $x + 4 = x - (-4)$ liekana yra

$$P(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 + 10(-4) + 8;$$

o dalybos iš $(x - 4)$ liekana lygi

$$P(4) = 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 8 = 208.$$

Ats.: 0; 208.

4. Apskaičiavę daugianario reikšmę taške $x = 1$, gauname $P(1) = 5 - 2 + 2 + 2 - 7 = 0$. Šis rezultatas rodo (pagal Bezu teoremą), kad daugianaris $P(x)$ dalijasi iš dvinario $(x - 1)$.

Ats.: taip.

5. Padalykime daugianarį $(6x^3 - 7x^2 - 16x + m)$ iš dvinario $(x - 2)$:

$$\begin{array}{l|l}
-\ 6x^3-7x^2-16x+m & \underline{x-2} \\
\quad \underline{6x^3-12x^2} & 6x^2+5x-6 \\
\qquad -\ 5x^2-16x & \\
\qquad\quad \underline{5x^2-10x} & \\
\qquad\qquad -\ {-6x}+m & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-6x+12} & \\
\qquad\qquad\qquad m-12 &
\end{array}$$

Skaičius 2 yra daugianario šaknis, kai liekana $(m - 12)$ yra lygi nuliui. Taigi $m = 12$. Kitas dvi šaknis rasime išsprendę kvadratinę lygtį $6x^2 + 5x - 6 = 0$; gausime $\frac{2}{3}$ ir $-\frac{3}{2}$.

Ats.: 2; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

6. Kad daugianaris $(2x^3 + mx^2 - 13x + n)$ turėtų šaknis 2 ir 3, jis turi dalytis ir iš $(x - 2)$, ir iš $(x - 3)$; taigi iš sandaugos $(x - 2) \cdot (x - 3) = x^2 - 5x + 6$. Dalydami kampu gauname:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\;\;}2x^3+mx^2-13x+n & \underline{x^2-5x+6} \\
\underline{2x^3-10x^2+12x} & 2x+(10+m) \\
\quad \underline{\;\;}(10+m)x^2-25x+n & \\
\quad \underline{(10+m)x^2-(50+5m)x+(60+6m)} & \\
\qquad\qquad (25+5m)x+(n-60-6m) &
\end{array}
$$

Liekana lygi nuliui, kai $m=-5$; $n=30$.

Tuomet įrašę $m=-5$ į lygtį $2x+(10+m)=0$, gauname:

$2x+5=0 \Rightarrow x=-2{,}5$.

Ats.: $m=5$, $n=30$; $-2{,}5$.

7.

	7	–14	0	3	–7	3	–2	liekana
1	7	–7	–7	–4	–11	–8	–10	–10
–1	7	–21	21	–18	11	–8	6	6
2	7	0	0	3	–1	1	0	0
–2	7	–28	56	–109	211	–419	836	836

8.

	4	9	13	10	liekana
–2	4	1	11	–11	–11

Ats.: ne.

9. Tegu x_1 ir x_2 yra daugianario šaknys, kurių sandauga lygi 2. Tada daugianaris dalijasi ir iš dvinario $(x-x_1)$, ir iš dvinario $(x-x_2)$. Taigi, jis dalijasi iš sandaugos $(x-x_1)(x-x_2)$, kurią galima užrašyti trinariu (x^2+ax+2); čia $a=-(x_1+x_2)$.

Dalydami daugianarį $(x^4-x^3+mx^2+10x-4)$ iš trinario (x^2+ax+2) gauname:

$$
\begin{aligned}
x^4-x^3+mx^2+10x-4 &= \\
&=(x^2+ax+2)\,(x^2-(a+1)x+(a^2+a-2+m))+ \\
&\quad +(12+4a-am-a^2-a^3)x-(2m+2a+2a^2).
\end{aligned}
$$

Liekana yra lygi nuliui tik tada, kai $12+4a-am-a^2-a^3=0$ ir $2m+2a+2a^2=0$. Toliau sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases}12+4a-am-a^2-a^3=0,\\2m+2a+2a^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12+4a-a(m+a+a^2)=0,\\2(m+a+a^2)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12+4a=0,\\m+a+a^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3,\\m=-a-a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3,\\m=-6.\end{cases}$$

Dar reikia patikrinti, ar egzistuoja realieji skaičiai x_1 ir x_2, tenkinantys sąlygas $x_1+x_2=3$ ir $x_1\cdot x_2=2$; todėl sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases}x_1+x_2=3,\\x_1\cdot x_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=3-x_1,\\x_1(3-x_1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=3-x_1,\\x_1^2-3x_1+2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=3-x_1,\\x_1\in\{1;2\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2,\\x_1=1\end{cases}\text{arba}\begin{cases}x_2=1,\\x_1=2.\end{cases}$$

Matome, kad kai m reikšmė, lygi –6, daugianaris $(x^4-x^3+mx^2+10x-4)$ turi dvi šaknis, kurių sandauga yra 2.

Ats.: –6.

10. Keturis kartus pritaikę Hornerio schemą, gauname $n=4$.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $3C_n^1+7C_n^2+11C_n^3+...+(4n-1)C_n^n=$

$=4(C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n)-(C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^n)=$

$=4\cdot n2^{n-1}-(2^n-1)=n2^{n+1}-2^n+1.$

Ats.: $n2^{n+1}-2^n+1.$

2. Niutono binomo $(5+2x)^{16}$ skleidinio ketvirtasis narys yra $C_{16}^3\cdot5^{13}\cdot(2x)^3$, o gretimi jam – trečiasis narys $C_{16}^2\cdot5^{14}\cdot(2x)^2$ ir penktasis $C_{16}^4\cdot5^{12}\cdot(2x)^4$. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti dviejų nelygybių sistemą

$$\begin{cases} C_{16}^3 \cdot 5^{13} \cdot (2x)^3 > C_{16}^2 \cdot 5^{14} \cdot (2x)^2, \\ C_{16}^3 \cdot 5^{13} \cdot (2x)^3 > C_{16}^4 \cdot 5^{12} \cdot (2x)^4. \end{cases}$$

Gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{16!}{3!\,13!} \cdot 5^{13} \cdot 8x^3 > \dfrac{16!}{2!\,14!} \cdot 5^{14} \cdot 4x^2, \\ \dfrac{16!}{3!\,13!} \cdot 5^{13} \cdot 8x^3 > \dfrac{16!}{4!\,12!} \cdot 5^{12} \cdot 16x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^3}{3} > \dfrac{5x^2}{14}, \\ \dfrac{5x^3}{13} > \dfrac{x^4}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2(28x-15) > 0, \\ x^3(13x-10) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{15}{28}, \\ x^3(13x-10) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{15}{28}, \\ x > \dfrac{10}{13}. \end{cases}$$

Ats.: $\dfrac{15}{28} < x < \dfrac{10}{3}$.

3. Niutono binomo $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ skleidinio trečiasis narys yra

$$C_n^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 (2x)^{n-2} = C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot x^{n-6}.$$

Pagal uždavinio sąlygą $n-6=0$, t. y. $n=6$; taigi turime Niutono binomą $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$, kurio skleidinio trečiasis narys yra $C_6^2 \cdot 2^4 = \dfrac{6!}{2!\,4!} \cdot 16 = 240.$

Niutono binomo $(1+x^3)^{30}$ skleidinio antrasis narys yra $C_{30}^1 x^3 = 30x^3$. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti lygtį $240 = 30x^3$. Gauname $x=2$.

Ats.: 2.

4. Niutono binomo $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ skleidinio ketvirtasis narys yra $C_n^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^{n-3} = C_n^3 \cdot n^{n-6}$, o ketvirtasis nuo galo narys yra $C_n^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-3} \cdot n^3 = C_n^{n-3} \cdot n^{6-n}$. Toliau sprendžiame lygtį:

$$C_n^3 \cdot n^{n-6} \cdot C_n^{n-3} \cdot n^{6-n} = 14\,400 \;\Rightarrow\; C_n^3 \cdot C_n^{n-3} = 14\,400 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{n!}{3!\,(n-3)!} \cdot \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = 14\,400 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}\right)^2 = 14\,400 \;\Rightarrow\; \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6} = 120 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; n\,(n-1)\,(n-2) = 720 \;\Rightarrow\; n = 10.$$

Taigi turime Niutono binomą $\left(10+\frac{1}{10}\right)^{10}$. Jo skleidinys turi 11 narių, todėl didžiausią binominį koeficientą turi šeštasis narys. Šis koeficientas yra $C_{10}^5 = 252$.

Ats.: 252.

5. Niutono binomų $(a+b)^{n+1}$ ir $(a+b)^n$ skleidinių trečiųjų narių binominiai koeficientai yra atitinkamai C_{n+1}^2 ir C_n^2. Pagal uždavinio sąlygą $C_{n+1}^2 - C_n^2 = 225$. Spręsdami šią lygtį, gauname:

$$\frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} - \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 225 \;\Rightarrow\; \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 225 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; n = 225.$$

Toliau nagrinėkime Niutono binomą $\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y}\right)^{225}$. Jo skleidinio narius pažymėkime T_{k+1}, $k = 0, 1, \ldots, 225$. Tada

$$T_{k+1} = C_{225}^k \cdot \left(\sqrt[4]{y}\right)^k \cdot \left(\sqrt[5]{x}\right)^{225-k} = C_{225}^k \cdot x^{\frac{225-k}{5}} \cdot y^{\frac{k}{4}}.$$

Abu laipsnio rodikliai $\left(\frac{225-k}{5} \text{ ir } \frac{k}{4}\right)$ turi būti sveikieji skaičiai, tarkime, p ir m.

Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} \frac{225-k}{5} = p, \\ \frac{k}{4} = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225-k = p, \\ k = 4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225-4m = 5p, \\ k = 4m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(45-p) = 4m, \\ k = 4m. \end{cases}$$

Matome, kad skaičius $45-p$ turi dalytis iš 4; todėl $p \in \{1; 5; 9; 13; ...; 45\}$; šiuos skaičius galima užrašyti formule

$$p = 4l+1, \quad l = 0, 1, 2, ..., 11.$$

Tada $m = 5(11-l)$ ir $k = 20(11-l)$; $l = 0, 1, 2, ..., 11$. Vadinasi, skleidinyje yra 12 narių su sveikaisiais x ir y laipsnio rodikliais.

Ats.: 12.

6. Niutono binomo $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ skleidinio pirmieji trys nariai (pažymėkime juos T_1, T_2 ir T_3) yra tokie:

$$T_1 = C_n^0 \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^0 \left(\sqrt{x}\right)^n = x^{\frac{n}{2}},$$

$$T_2 = C_n^1 \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{n-1} = \frac{n}{2} \cdot x^{\frac{2n-3}{4}},$$

$$T_3 = C_n^2 \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(\sqrt{x}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{8} \cdot x^{\frac{n-3}{2}}.$$

Šių narių koeficientai (prie kintamojo x) 1, $\frac{n}{2}$ ir $\frac{n(n-1)}{8}$ sudaro aritmetinę progresiją; todėl gauname $n = 8$.

Toliau nagrinėjame Niutono binomą $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$. Jo skleidinio narius pažymėję T_{k+1}, $k=0,1,2....,8$, gauname:

$$T_{k+1}=C_8^2\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{8-k}=C_8^2\cdot\frac{1}{2^k}\cdot x^{\frac{16-3k}{4}};$$

$$\frac{16-3k}{4}=m,\ m\in\mathrm{Z}\Rightarrow k=\frac{4(4-m)}{3},\ m\in\mathrm{Z}\Rightarrow k\in\{0;4;8\}.$$

Taigi turime tris narius su sveikaisiais kintamojo x laipsnio rodikliais:

$$T_1=x^4,\ T_5=C_8^4\cdot\frac{1}{2^4}\cdot x=\frac{35x}{8},\ T_9=C_8^8\cdot\frac{1}{2^8}\cdot x^{-2}=\frac{x^{-2}}{256}.$$

Ats.: $x^4,\ \frac{35x}{8},\ \frac{x^{-2}}{256}$.

7. Remsimės polinomine formule

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}.$$

Taikydami ją laipsniui $(1+x^2-x^3)^{1000}$, gausime:

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{k_1+k_2+k_3=1000}\frac{(-1)^{k_3}\cdot1000!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}x^{2k_2+3k_3}.$$

Laipsnį x^{17} pagal šią formulę gausime tik tada, kai $k_1=983$, $2k_2+3k_3=17$ (čia k_2 ir k_3 yra neneigiami sveikieji skaičiai). Aišku, kad yra galimos tik tokios k_2 ir k_3 poros: $k_2=7$, $k_3=1$; $k_2=4$, $k_3=3$; $k_2=1$, $k_3=5$. Todėl turėsime tokią koeficiento prie x^{17} išraišką:

$$-\frac{1000!}{983!\,7!\,1!}-\frac{1000!}{983!\,4!\,3!}-\frac{1000!}{983!\,1!\,5!}.$$

Analogiškai nagrinėdami laipsnio $(1-x^2+x^3)^{1000}$ skleidinį,

gausime tokią koeficiento prie x^{17} išraišką:

$$-\frac{1000!}{983!\,7!\,1!}+\frac{1000!}{983!\,4!\,3!}-\frac{1000!}{983!\,1!\,5!}.$$

Aišku, kad šis skaičius yra didesnis už pirmojo skleidinio koeficientą prie x^{17}.

Ats.: skleidinio $(1-x^2+x^3)^{1000}$ koeficientas prie x^{17} yra didesnis už $(1+x^2-x^3)^{1000}$ skleidinio koeficientą prie x^{17}.

8. Pagal polinominę formulę

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3},$$

gausime:

$$\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}=\sum_{k_1+k_2+k_3=10}\frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\cdot 2^{k_1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k_2}\cdot\left(x^2\right)^{k_3}=$$

$$=\sum_{k_1+k_2+k_3=10}\frac{(-1)^{k_2}\cdot 2^{k_1}\cdot 10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\cdot x^{\frac{4k_3-k_2}{2}}.$$

Aišku, kad kintamojo x neturės tie dėmenys, kuriuose $4k_3-k_2=0$; čia k_1, k_2 ir k_3 yra neneigiami sveikieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $k_1+k_2+k_3=10$. Galimi šie skaičių k_1, k_2 ir k_3 trejetai: (0; 8; 2), (5; 4; 1), (10; 0; 0).

Vadinasi, yra trys skleidinio nariai, neturintys kintamojo x:

$$\frac{(-1)^8\cdot 2^0\cdot 10!}{0!\,8!\,2!}=\frac{10!}{8!\,2!}=45,$$

$$\frac{(-1)^4\cdot 2^5\cdot 10!}{5!\,4!\,1!}=\frac{32\cdot 10!}{5!\,4!}=40\,320,$$

$$\frac{(-1)^0\cdot 2^{10}\cdot 10!}{10!\,0!\,0!}=2^{10}=1024.$$

Ats.: 45, 40 320 ir 1024.

9. Taikydami polinominę formulę

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

gauname:

$$(1 + x^2 + x^5)^{20} = \sum_{k_1+k_2+k_3=20} \frac{20!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \left(x^2\right)^{k_2} \left(x^5\right)^{k_3} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+k_3=20} \frac{20!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \cdot x^{2k_2+5k_3}.$$

Mažiausia laipsnio rodiklio $(2k_2 + 5k_3)$ reikšmė yra lygi nuliui (kai $k_1 = 20$, $k_2 = k_3 = 0$), o didžiausia – lygi šimtui (kai $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 20$). Nagrinėdami reiškinį $(2k_2 + 5k_3)$, įsitikiname, kad formulėje nebus narių su šiais kintamojo x laipsnio rodikliais: 1, 3, 93, 96, 98, 99. Taigi turėsime $101 - 6 = 95$ daugianario (gauto sutraukus panašiuosius narius) dėmenis su skirtingais kintamojo x laipsniais.

Ats.: 95.

10. Niutono binomo skleidinio visų binominių koeficientų suma yra lygi 2^n (pagal 1 savybę), o pagal 3 savybę lyginėse vietose esančių narių binominių koeficientų suma yra lygi nelyginėse vietose esančių narių binominių koeficientų sumai; todėl

$$2^n = 2 \cdot 2048 = 4096 \Rightarrow n = 12.$$

Niutono binomo $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ skleidinio narius pažymėkime T_{k+1}, $k = 0, 1, 2, ..., 12$. Skaičiuodami gausime:

$$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{12-k} = C_{12}^k \cdot x^{\frac{24-5k}{6}}.$$

Laipsnio rodiklis $\frac{24-5k}{6}$, $k = 0, 1, 2, ..., 12$, yra sveikasis skaičius tik su $k \in \{0; 6; 12\}$. Taigi skleidinyje yra trys nariai su sveikaisiais

x laipsniais:

$$T_1 = C_{12}^{0} x^4 = x^4,$$
$$T_7 = C_{12}^{6} x^{-1} = 924x^{-1},$$
$$T_{13} = C_{12}^{12} x^{-6} = x^{-6}.$$

Ats.: $x^4,\ 924x^{-1},\ x^{-6}.$

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, tai spręskime lygtį

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}=2\sqrt{2}.$$

Pažymėję $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x$, gauname:

$$t+\frac{1}{t}=2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ t^2-2\sqrt{2}\cdot t+1=0\ \Rightarrow\ t=\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

arba $t=\sqrt{2}+1$.

Vadinasi,

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}-1\ \text{ arba }\ \left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}+1.$$

Pirmuoju atveju gauname $x=-1$, o antruoju gauname $x=1$.

Ats.: ± 1.

2. Iš pradžių raskime lygties apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} 4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1>0, \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{x}-2}>1, \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x>4.$$

Turėdami mintyje, kad $x>4$, pertvarkykime sprendžiamą lygtį:

$$\lg\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-\lg 10=\lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-\lg 4,$$

$$\lg\frac{2^{\sqrt{x}-2}-1}{10}=\lg\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{4},$$

$$\frac{2^{\sqrt{x}-2}-1}{10}=\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2}{4},$$

$$2^{\sqrt{x}}-4=10\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+20,$$

$$2^{\sqrt{x}}-10\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-2}{2}}-24=0,$$

$$2^{\sqrt{x}}-10\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}-1}-24=0,$$

$$2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}-24=0.$$

Pažymėję $z=\frac{\sqrt{x}}{2}$, gauname lygtį $z^2-5z-24=0$, turinčią du sprendinius: 8 ir –3, pastarasis netinka, nes $z>0$. Toliau sprendžiame lygtį $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}=8$ ir gauname $x=36$.

Ats.: 36.

3. Ieškosime lygties natūraliųjų sprendinių:

$2^x+2^y+2^z=2336 \Rightarrow 2^x\cdot(1+2^{y-x}+2^{z-x})=2336 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x\cdot(1+2^{y-x}+2^{z-x})=2^5\cdot 73 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=5$ ir $1+2^{y-x}+2^{z-x}=73$.

Spręsdami antrąją lygtį, gauname:

$2^{y-x}+2^{z-x}=72 \Rightarrow 2^{y-5}+2^{z-5}=72 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{y-5}(1+2^{z-y})=2^3\cdot 9 \Rightarrow y-5=3$ ir $1+2^{z-y}=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=8$ ir $z=11$.

Taigi $x=5$, $y=8$, $z=11$.

Ats.: (5; 8; 11).

4. Skaičiuodami skirtumą tarp $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$ ir 2, gauname:

$$\left(\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}\right) - 2 = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 - 2 =$$

$$= \log_\pi 10 - 2 > \log_\pi (\pi)^2 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Vadinasi, $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

5. Nelygybė $\log_{x^2+3x}(x+1) < 1$ yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_{x^2+3x}(x+1) < \log_{x^2+3x}(x^2+3x),$$

todėl

$$1)\ \begin{cases} x^2+3x > 1, \\ x+1 > 0, \\ x+1 < x^2+3x, \end{cases} \quad \text{arba} \quad 2)\ \begin{cases} 0 < x^2+3x < 1, \\ x+1 > x^2+3x. \end{cases}$$

Iš pirmosios sistemos gauname $x \in (\sqrt{2} - 1; +\infty)$, o iš antrosios $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)$. Taigi, $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}-1; +\infty\right)$.

Ats.: $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}-1; +\infty\right)$.

6. Pažymėkime $z = 5^x$; tada turėsime lygtį

$$z^2 - (a-4)z - 2a^2 + 10a - 12 = 0.$$

Jos diskriminantas yra

$$D = (a-4)^2 - 4 \cdot (-2a^2 + 10a - 12) =$$

$$= a^2 - 8a + 16 + 8a^2 - 40a + 48 = 9a^2 - 48a + 64 = (3a-8)^2,$$

todėl lygties sprendiniai tokie:

$$z_1 = \frac{a-4-3a+8}{2} = \frac{4-2a}{2} = 2-a,$$

$$z_2 = \frac{a-4+3a-8}{2} = \frac{4a-12}{2} = 2a-6.$$

Vadinasi, $5^x = 2-a$ arba $5^x = 2a-6$.

Pirmoji lygtis neturi sprendinių, kai $a \geq 2$, o antroji – kai $a \leq 3$. Taigi, $a \in [2; 3]$.

Ats.: $2 \leq a \leq 3$.

7. Pagal logaritmo apibrėžimą $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Pakeitę antrojo logaritmo pagrindą, gausime:

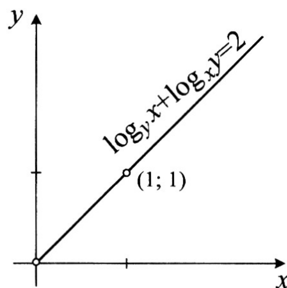
$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2 \Rightarrow$$

$$\log_y^2 x - 2\log_y x + 1 = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_y x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = y.$$

Taigi, $y = x$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Ats.: $y = x$, $x > 0$, $x \neq 1$.



1 pav.

8. 1) Kai $a \neq 1$, gauname:

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} =$$

$$= \frac{\log_a(c-b) + \log_a(c+b)}{\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)} = \frac{\log_a((c-b)(c+b))}{\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)} =$$

$$= \log_a a^2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

2) Kai $a = 1$, lygybė akivaizdi.

9. Pritaikę formulę $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$, gauname:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \lg 2.$$

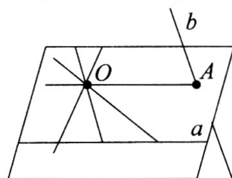
10. Pastebėję, kad $\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ kartų}} = 3^{\frac{1}{3^n}}$, gaunamе:

$$\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}} = \log_3 \log_3 \left(3^{\frac{1}{3^n}} \right) = \log_3 \frac{1}{3^n} = -\log_3 3^n = -n\,.$$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

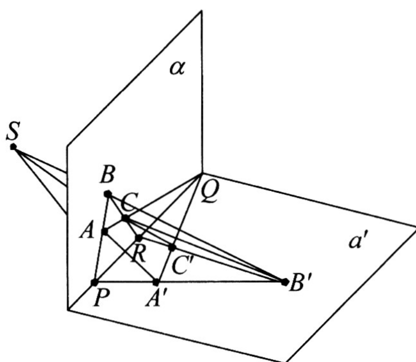
1. Visos tiesės, einančios per tašką O ir kertančios tiesę a, yra plokštumoje α, einančioje per tašką O ir tiesę a (1 pav.). Jei plokštuma α kerta tiesę b taške A, o tiesė OA nėra lygiagreti su tiese a, tai tiesė OA – ieškomoji. Bet jei plokštuma α lygiagreti su tiese b, arba tiesė b su plokštuma α kertasi taške A taip, kad tiesės OA ir a lygiagrečios, tai uždavinio sąlygą tenkinančių tiesių nėra.

Ats.: ne visada.



1 pav.

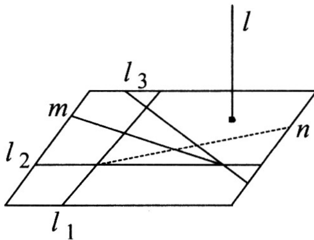
2. Kadangi tiesės AB ir $A'B'$ kertasi, tai jos yra vienoje plokštumoje β. Kadangi tiesės AA' ir BB', esančios plokštumoje β, nelygiagrečios, tai jos kertasi taške S (2 pav.). Analogiškai parodome, kad ir tiesės AA' bei CC' yra vienoje plokštumoje β', o tiesė CC' kerta tiesę AA' taške T. Kadangi tiesė AA' yra plokštumoje β, o tiesė CC' kerta tiesę AA' taške T, tai taške T tiesė CC' kerta plokštumą β. Kadangi tiesė BB' yra plokštumoje β, o tiesės CC' ir BB' kertasi, tai jų sankirtos taškas



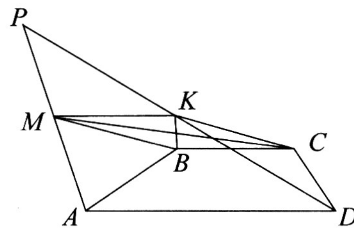
2 pav.

yra ir tiesėje CC', ir plokštumoje β, t. y. tiesės CC' ir BB' kertasi taške T. Taigi taškas T yra ir tiesėje AA', ir tiesėje BB', t. y. jis sutampa su tašku S, kuris priklauso tiesėms AA', BB' ir CC'.

3. Sakykime, kad plokštumoje α yra trys nelygiagrečios tiesės l_1, l_2 ir l_3, sudarančios vienodus kampus su tiese l (3 pav.). Pagal 2 pavyzdį tiesė l statmena vieno iš kampų tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinei n ir vieno iš kampų tarp tiesių l_2 ir l_3 pusiaukampinei m. Tiesės m ir n susikerta, nes jos yra trikampio kampų (ar jo priekampių) pusiaukampinės. Tuomet pagal 7 teoremą tiesė l statmena plokštumai α.



3 pav.



4 pav.

4. Sakykime, kad trikampis ADP yra plokštumoje α (4 pav.). Kadangi tiesės AD ir BC lygiagrečios, o tiesė AD yra plokštumoje α, tai tiesės BC lygiagreti su plokštuma α (9 teorema). Plokštuma β, einanti per taškus B, C ir K, pagal 9 teoremą lygiagreti su tiese AD. Pagal 3 pavyzdį plokštumų α ir β sankirtos tiesė MK yra lygiagreti ir su tiese BC, ir su tiese AD. Kadangi taškas K yra atkarpos PD vidurio taškas, o $MK \| AD$, tai atkarpa MK yra trikampio APD vidurio linija ir $MK = \frac{1}{2}AD = BC$. Taigi keturkampio $BCKM$ priešingos kraštinės BC ir MK lygios ir lygiagrečios, t. y. šis keturkampis lygiagretainis ir jo įstrižainės KB ir MC susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.

5. Kadangi kubo sienų įstrižainės CB_1 ir DA_1 yra lygiagrečios, tai kampas KCB_1 yra lygus ieškomajam kampui (5 pav.). Pagal kosinusų teoremą trikampiui KCB_1 turime

$$\cos\angle KCB_1 = \frac{KC^2 + CB_1^2 - KB_1^2}{2KC\cdot CB_1}.$$

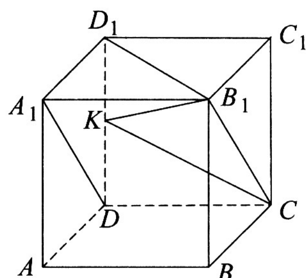
Kadangi

$$KC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},\ CB_1 = \sqrt{2},\ KB_1 = \sqrt{KD_1^2 + D_1B_1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2},\ \text{tai}$$

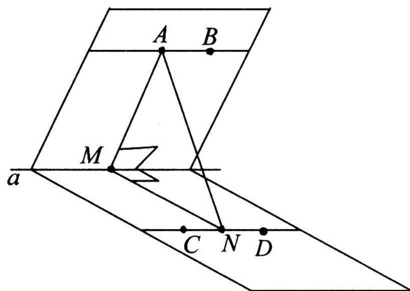
$$\cos\angle KCB_1 = \frac{\frac{5}{4} + 2 - \frac{9}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ats.: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.



5 pav.

6. Pastebėkime, kad tiesės AB ir CD yra lygiagrečios su dvisienio kampo briauna a (6 pav.). Tikrai, jei tiesės AB ir a kirstųsi, tai tiesė AB kirstų antrąją dvisienio kampo sieną taške, nepriklausančiame tiesei CD, todėl tiesės AB ir CD būtų prasilenkiančios (5 teorema). Nuleiskime iš taško A statmenį AM į tiesę a, o iš taško M iškelkime statmenį MN į tiesę a, $N \in CD$. Pagal sąlygą $AM = 8$, $MN = 6{,}5$, $\angle AMN = 60^\circ$. Kadangi tiesė



6 pav.

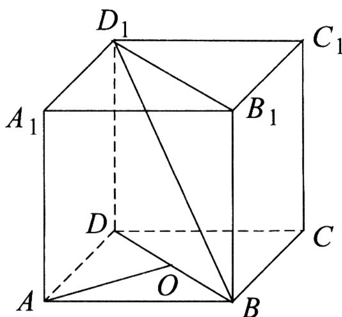
MN yra tiesės AN ortogonalioji projekcija plokštumoje, kuriai priklauso tiesė CD ir $MN \perp CD$, tai pagal trijų statmenų teoremą

$AN \perp CD$. Taigi AN yra tiesių AB ir CD bendras statmuo ir jo ilgis lygus ieškomajam atstumui. Iš trikampio AMN randame

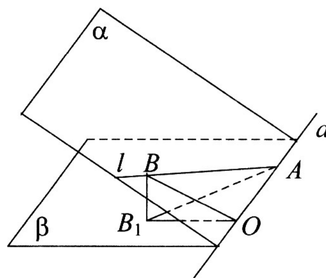
$$AN^2 = AM^2 + MN^2 - 2AM \cdot MN \cdot \cos 60^\circ = \frac{217}{4}.$$

Ats.: $\dfrac{\sqrt{217}}{2}$.

7. Sakykime, kad $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – duotasis kubas, BD_1 – jo įstrižainė, AA_1 – su ja prasilenkianti kubo briauna (7 pav.). Kadangi tiesės AA_1 ir BB_1 lygiagrečios, tai plokštuma α, einanti per taškus B, D, D_1 ir B_1, eina per tiesę BD_1 ir yra lygiagreti su tiese AA_1 (9 teorema). Nuleiskime statmenį AO į tiesę BD. Kadangi $ABCD$ –



7 pav.



8 pav.

kvadratas, kurio kraštinė lygi a, tai $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Bet atkarpa AO yra bendrasis tiesės AA_1 ir plokštumos α statmuo, todėl jos ilgis lygus ieškomajam atstumui.

Ats.: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

8. Sakykime, kad plokštumų α ir β sudaromo dvisienio kampo briauna – tiesė a, o tiesė l yra plokštumoje α ir kerta tiesę a taške A (8 pav.). Sakykime, kad taškas B yra tiesėje l ir atstumas AB lygus a, o taškas

B_1 yra taško B ortogonalioji projekcija plokštumoje β. Jei taškas O – taško B ortogonalioji projekcija tiesėje a, tai $OB \perp a$. $BB_1 \perp AB_1$, ir pagal trijų statmenų teoremą $OB_1 \perp a$. Iš stačiųjų trikampių BAB_1, AOB_1 ir OB_1B gauname:

$$\sin \angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{a};\ BB_1 = OB \sin \angle BOB_1,$$

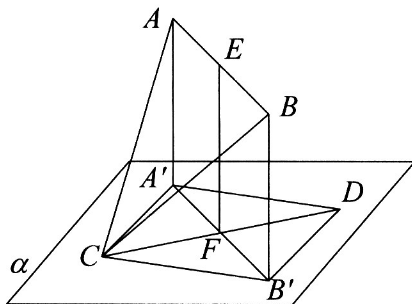
$$OB = a \sin \angle BAO,$$

$$BB_1 = a \sin \angle BOB_1 \cdot \sin \angle BAO,$$

$$\sin \angle BAB_1 = \sin \angle BOB_1 \cdot \sin \angle BAO.$$

Aišku, kad $\sin \angle BAB_1 < \sin \angle BOB_1$, kai A nesutampa su O. Vadinasi, didžiausią reikšmę $\sin \angle BAB_1$ (todėl ir $\angle BAB_1$) įgyja tik tada, kai taškas A sutampa su tašku O; tada $l \perp a$.

9. Pažymėkime α plokštumą, einančią per tiesę CD ir lygiagrečią su tiese AB (9 pav.).



9 pav.

Sakykime, kad taškai A' ir B' yra taškų A ir B ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α. Akivaizdu, kad taško E ortogonalioji projekcija yra taškas F. Kadangi $AB \parallel \alpha$, tai $AA' = BB' = EF = \sqrt{13}$. Keturkampis $ABB'A'$ yra stačiakampis, todėl $A'B' = AB = 2\sqrt{5}$. Kadangi taškas F yra atkarpų $A'B'$ ir CD vidurio taškas, tai keturkampis $A'DB'C$ yra lygiagretainis, kurio įstrižainių ilgiai $A'B' = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, o kampas tarp jų $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Tuomet pagal kosinusų teoremą

$$B'D^2 = A'C^2 = FD^2 + FB'^2 - 2FD \cdot FB' \cdot \cos\left(\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}\right) =$$

$$=7+5-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{35}}{10}=5,$$

$$CB'^2=A'D^2=FD^2+FB'^2-2FD\cdot FB'\cdot\cos\left(180^\circ-\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}\right)=$$

$$=7+5+2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{35}}{10}=19.$$

Iš stačiųjų trikampių $CA'A$ ir $CB'B$ randame:

$$AC^2=A'C^2+AA'^2=5+13=18,$$

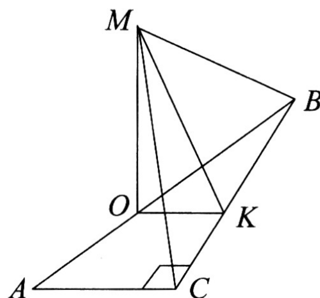
$$CB^2=CB'^2+BB'^2=19+13=32.$$

Iš trikampio ABC gauname

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+CB^2-AB^2}{2AC\cdot CB}=\frac{18+32-20}{2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{32}}=\frac{5}{8}.$$

Ats.: $\arccos\frac{5}{8}$.

10. Kadangi taškas M yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių, tai jo ortogonalioji projekcija trikampio ABC plokštumoje α yra trikampio įžambinės AB vidurio taškas O (10 pav.). Nubrėžkime trikampio ABC vidurio liniją $OK \| AC$, tai $OK\perp BC$, ir pagal trijų statmenų teoremą $MK\perp BC$. Taigi kampas OKM yra dvisienio kampo tarp uždavinio sąlygoje nurodytų plokštumų tiesinis kampas. Iš trikampio OKM randame $OM=$



10 pav.

$$=OK\cdot\mathrm{tg}\angle OKM=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ats.: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Iš pradžių patyrinėkime sandaugą $\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$:

$$\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) =$$
$$= ((\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta))((\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)) =$$
$$= ((\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + (\sin\alpha\cos\beta +$$
$$+ \sin\beta\cos\alpha)) \cdot ((\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) -$$
$$- (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)) =$$
$$(\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))(\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)) =$$
$$= \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta).$$

Remdamiesi gautąja formule (tapatybe), turėsime:

$$\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta =$$
$$= \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) =$$
$$= \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1.$$

2. Taikydami dvigubo argumento kosinuso formulę bei kitas žinomas tapatybes, gauname:

$$\frac{5 + 3\cos 4x}{8} = \frac{5 + 3(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{8} = \frac{2 + 6\cos^2 2x}{8} =$$
$$= \frac{1 + 3\cos^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x + 4\cos^2 2x}{4} =$$
$$= \frac{\sin^2 2x}{4} + \cos^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 =$$
$$= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x) =$$
$$= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x\cos^2 x) +$$
$$+ (\cos^6 x + \sin^6 x) - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$=\frac{\sin^2 2x}{4}+\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\cos^6 x+\sin^6 x)-$$

$$-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{\sin^2 2x}{4}+(\cos^6 x+\sin^6 x)-\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$

$$=\frac{\sin^2 2x}{4}+(\cos^6 x+\sin^6 x)-\frac{\sin^2 2x}{4}=\cos^6 x+\sin^6 x.$$

3. Iš sąlygos $2\pi<x<3\pi$ gauname sąlygą $\pi<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2}$. Vadinasi, $\cos\frac{x}{2}\in(-1;0)$.

Pertvarkykime $\cos x$:

$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1.$$

Todėl $\cos x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2}{3}$.

Kadangi $\cos\frac{x}{2}<0$, tai $\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ats.: $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Skirtumą $(\cos 3x-\cos 5x)$ pakeiskime sandauga $2\sin x\sin 4x$. Tada vietoj $\cos 3x=\cos 5x$ turėsime lygtį $2\sin x\sin 4x=0$. Jos sprendinių aibę sudaro lygčių $\sin x=0$ ir $\sin 4x=0$ sprendinių aibių sąjunga. Lygties $\sin x=0$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai $x=n\pi$, $n\in$Z, o lygties $\sin 4x=0$ – realieji skaičiai $x=\frac{k\pi}{4}$, $k\in$ Z. Aibė $\{x: x=n\pi,\ n\in Z\}$ yra aibės $\{x: x=\frac{k\pi}{4},\ k\in Z\}$ poaibis, todėl šių aibių sąjunga yra aibė $\{x: x=\frac{k\pi}{4},\ k\in Z\}$.

Ats.: $\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

5. Žinome, kad $-1 \le \sin 4x \le 1$, $0 \le |\sin 5x| \le 1$; todėl lygybė $\sin 4x + |\sin 5x| = 2$ įmanoma tik tada, kai $\sin 4x = 1$ ir $|\sin 5x| = 1$. Turime išspręsti trigonometrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin 4x = 1, \\ |\sin 5x| = 1. \end{cases}$$

Pirmosios lygties sprendinių aibę sudaro taškai $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, o antrosios – taškai $x = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}$, $m \in Z$.

Ieškant šių aibių sankirtos (sistemos sprendinių aibės), reikia rasti tokias sveikųjų skaičių *k* ir *m* poras, su kuriomis galiotų lygybė

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}.$$

Iš čia gauname tokį sąryšį tarp *k* ir *m*:

$$20k = 8m - 1,\ k \in Z,\ m \in Z.$$

Tačiau lygtis $20k = 8m - 1$ neturi sveikųjų sprendinių ($20k$ yra lyginis skaičius, o $(8m - 1)$ – nelyginis skaičius, kai $k \in Z$ ir $m \in Z$).

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

6. Lygybė $\sin 6x \cdot \cos 8x = 1$ yra galima tik dviem atvejais:

a) $\sin 6x = 1$ ir $\cos 8x = 1$;

b) $\sin 6x = -1$ ir $\cos 8x = -1$.

Pirmuoju atveju gauname:

$$\begin{cases} \sin 6x = 1, \\ \cos 8x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in Z, \\ x = \frac{m\pi}{4}, m \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} = \frac{m\pi}{4}, \\ x = \frac{m\pi}{4};\ k \in Z, m \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{3(m+1)}{4} - 1, \\ x = \dfrac{m\pi}{4};\ k \in Z, m \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 4n, \\ x = \dfrac{m\pi}{4};\ n \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z.$$

Antrąjį atvejį nagrinėjame analogiškai:

$$\begin{cases} \sin 6x = -1, \\ \cos 8x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{4},\ m \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{4}, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{4};\ k \in Z, m \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k = 6m + 5, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{4};\ k \in Z, m \in Z \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Ats.: $-\dfrac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in Z.$

7. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$

$= \cos^2 2x + \dfrac{\sin^2 2x}{2} = \dfrac{1 + \cos^2 2x}{2} \geq \dfrac{1}{2}$

su visais realiaisiais skaičiais x.

8. Pertvarkykime kairiąją nelygybės pusę:

$2\sin^2 x - 3\cos x - 1 =$

$= 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 1 = 1 - 2\cos^2 x - 3\cos x.$

Turėsime išspręsti kvadratinę nelygybę

$2\cos^2 x + 3\cos x - 1 \leq 0$. Gausime:

$$-1 \leq \cos x \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{4},$$

$$\arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + 2n\pi \leq x \leq \left(2\pi - \arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right) + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Ats.:

$$\left[\arccos\frac{-3+\sqrt{17}}{4}+2n\pi;\ \left(2\pi-\arccos\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)+2n\pi\right],\ n\in Z.$$

9. Pagal dvigubo argumento formulę

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x;$$

todėl spręskime ekvivalenčią nelygybę

$$1-2\sin^2 x\ge \sin x:$$

$$1-2\sin^2 x\ge\sin x\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1\le 0\Rightarrow -1\le\sin x\le\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{7\pi}{6}+2n\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z.$$

Ats.: $\left[-\frac{7\pi}{6}+2n\pi;\ \frac{\pi}{6}+2n\pi\right],\ n\in Z.$

10. Išspręskime nelygybių sistemą:

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\ge\frac{3}{5},\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\ge\frac{3}{5},\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\ge\frac{3}{5},\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}-\frac{3}{5}\ge 0,\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{10\mathrm{tg}\alpha-3-3\mathrm{tg}^2\alpha}{5(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}\ge 0,\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\mathrm{tg}^2\alpha-10\mathrm{tg}\alpha+3\le 0,\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}\le\mathrm{tg}\alpha\le 3,\\ \mathrm{tg}\alpha\le\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}.$$

Tada $\sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{3}{5}$. Toliau sprendžiame lygčių

sistemą:

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=3\sin\alpha, \\ 6\sin^2\alpha=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=3\sin\alpha, \\ \sin^2\alpha=\dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=3\sin\alpha, \\ \sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}. \end{cases}$$

Ats.: $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
25	$(0;1)\cup(1;2)$	$-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$	$3\sqrt{3}$ cm



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*